Zum
Inventario
der fünften Klasse
der
Gelehrtenschule
unter Nro. XII-1 gehörig.

Math
1102

I. II.

Meßkunde

für die

Jugend,

von

Johann Georg Prändel
öffentlichem Repetitor der Mathematik und Physik auf dem churfl. Schulhause zu München.

Mit 2 Kupfertafeln.

München, 1798.
Bey Joseph Lentner.

Nro. 1630.

Meßkunde für die Jugend ꝛc.

Imprimatur

Sigmund Graf von Spretti,
Präsident,

München im churfl. Censur-
Collegio den 21. März 1797.

Registr. Fol. 193.

von Bube, Sekretär.

1993.2
Stadtbibliothek
Augsburg

Vorrede.

Der Knabe besucht die sogenannten Realschulen, oder, wie man sie sonst noch zu nennen pflegt, die Vorbereitungsklassen, wofür dieses kleine Werkchen zunächst bestimmt ist, in keiner andern Absicht, als daß er in selber entweder die gemeinnützigsten Kenntnisse zur Antrettung seines bürgerlichen Standes sammelt; oder aber festen Grund legt zur fernern Fortsetzung der litterärischen Laufbahn.

In jeder Rücksicht ist eine vorläufige Einleitung in die theoretische und praktische Meßkunde nicht nur nützlich, sondern

sogar

sogar auch nothwendig; denn sowohl der künftige Gewerbsmann als der werdende Gelehrte bedarf der geometrischen Kenntnisse weit mehr, als man beym ersten Anblicke glauben sollte. Diese offenbare Wahrheit bey unsern heutigen Zeiten noch mit Beweisthümern belegen wollen, wäre in der That überflüßig.

Nur kömmt hiebey alles darauf an, daß man für die Knabenseele gerade die leichtesten und zugleich auch die gemeinnützigsten Sätze auszuheben, und, was noch mehr gesagt haben will, auf die faßlichste Art vorzutragen wisse. Ob mir dieses, für Mathematiker sonst so seltene, Glück bey Ausarbeitung gegenwärtiger Meßkunde zu Theil geworden, kann und darf ich zwar für meine Person nicht behaupten: doch läßt mich das allgemeine

Zeugniß des In- und Auslandes, daß meinen herausgegebenen Lehrbüchern diese Eigenschaft vorzugsweise zukomme, vieler Wahrscheinlichkeit hoffen, mit daß Faßlichkeit und gemeinnützige Anwendung in leichten Beyspielen mir auch dießmal nicht fehlgeschlagen habe.

Ob ich aber der noch kleinlichen Jugend aus dem geometrischen Fache nicht zu viel zum Studieren aufgebürdet habe, ist eine andere Frage. Die Antwort hierauf ist diese. Knaben von Talent und Eifer finden nicht leicht etwas zu viel; besonders wenn Deutlichkeit und unverkennbarer Nutzen die Sache von selbst empfiehlt: da im Gegentheile andere, denen es entweder an Genie, oder Fleiße, oder aber an beyden zugleich gebricht, auch bey der mindesten Arbeit die man

ihnen vorlegt, gar bald klagen werden, man wolle ihre noch unentwickelten Fähigkeiten vollends überladen und ersticken.

Indeß ist hier bald Rath geschaft. Jeder Lehrer nehme aus diesen wenigen Bögen so viel heraus, als er glaubt, daß die Verdauungskraft seiner Zöglinge ertragen könne.

München den 26sten Christmonaths 1797.

Der Verfasser.

In=

Inhalt
der hierin vorkommenden Abschnitte.

I.

Vorläufige Erklärungen über die Gegenstände der Meßkunde, und über die verschiedene Maaße derselben. Seite 1.

II.

Nähere Erklärungen von den Gegenständen der Geometrie. 10.

III.

Von Messung und Theilung der geraden Linien auf dem Felde, und von Verjüngung derselben. 13.

IV.

Von Winkeln, deren Eintheilung und Messung. 19.

V.

Von den Parallellinien. 28.

VI.

Von Flächenfiguren, vorzüglich von Dreyecken. 31.

VII.

Von der Kongruenz der Dreyecke. 35.

VIII.

VIII.

Anwendung der Dreyeckskongruenz bey leichten Aufgaben und Sätzen. 60.

IX.

Von den Vierecken und ihrer Verzeichnung. 42.

X.

Von den Vielecken und ihrer Verzeichnung. 45.

XI.

Bestimmung der Winkel in den bis daher abgehandelten Flächenfiguren. 47.

XII.

Noch einige nothwendige Bemerkungen über die Flächenfiguren. 52.

XIII.

Von Berechnung der geradlinichten Figuren und des Zirkels, in Rücksicht ihres Flächeninhalts. 59.

XIV.

Anwendung der bisherigen Sätze auf das eigentliche Feldmessen. 69.

XV.

Erklärungen der Körperfiguren. 81.

XVI.

Von Ausmessung irregulärer Körper. 97.

XVII.

Auflösung der Exempel, die in diesem Werkchen dem Fleiße des Schülers überlassen worden. 100.

Vorläu-

Vorläufige Erklärungen über die Gegenstände der Meßkunde, und über die verschiedenen Maaße derselben.

§. 1.

Wenn jemand anzugeben sucht, wie weit ein Ort vom andern entfernt sey: setzen wir, Nymphenburg von München, so sagt man, daß er die Länge dieses Abstandes messe. Man nennt eine dergleichen Länge eine **Linie**.

Bestimmt man die Größe eines Platzes, wo neben der Länge desselben auch die Breite in Anschlag kömmt, z. B. eine gewiße Kirche fodert so und so viele Marmorplatten zu ihrem Pflaster, dann mißt man eine **Fläche**.

Berechne ich die Größe eines Raumes, wo neben Länge und Breite auch Höhe oder Tiefe vor-

kommen muß; etwa, wie viele Verschläge sich in ein Zimmer bringen lassen; oder wie viele Tabakbüchsen in eine Kiste gehen; wie viele Ziegelsteine bey einer Mauer sind u. d. gl.; so bin ich im Begriffe, den **körperlichen** oder **kubischen** Inhalt eines solchen Raumes zu messen.

§. 2.

Man kann demnach dreyerley Dinge in der Welt messen, nämlich **Längen** oder **Linien**, dann **Flächen** und drittens **Körper**. Jede dieser Messungen hat seine eigne Verfahrungsart; daher auch die drey Theile der Meßkunde: **Longimetrie, Planimetrie, Stereometrie**, das ist, die Kunst 1) **Linien**, 2) **Flächen**, 3) **Körper** auszumessen. Es wäre also überhaupt **Meßkunde**, (**Geometrie** oder **Geodäsie**) die **Wissenschaft**, die Größe der Linien, Flächen und Körper zu bestimmen.

§. 3.

Daß das Maaß einer Linie wieder eine andere willkührlich angenommene Linie, daß Maaß der Flächen eine andere Fläche, und das der Körper ebenfalls ein anderer Körper seyn müße, ist einleuchtend. Denn eine Größe ausmessen heißt nichts anders als finden, wie oft eine andere Größe der nämlichen Art in derselben enthalten sey. Es kann aber nur Linie in Linie, Fläche in Fläche und Körper in Körper enthalten seyn; daher muß jede dieser Größe ein Maaß von ihrer Art haben.

§. 4.

§. 4.

An und für sich betrachtet liegt eigentlich nichts daran, wie groß man ein solches Maaß annehmen will; wenn es nur nachgehends im Verfolge des nämlichen Geschäftes immer sich selbst gleich bleibt. Aus besondern Einverständniße der Meßkünstler aber ist in jedem Lande ein eigenes Maaß eingeführt, das man Schuh oder Fuß heißt, und mit der Fußsohlenlänge eines erwachsenen Menschen so ziemlich übereintrift. Daher hat auch Baiern seinen eignen Schuh, wovon Fig. 1 die Hälfte ist. Er verhält sich zum Pariserfuß wie 12938 zu 14400 und zum rheinländischen Schuh wie 12938 zu 13913. Mit andern Worten vorgetragen heißt dieß so viel, als daß 14400 baierische Schuhe so viel betragen als 12938 französische; und so viel rheinländische, nämlich 12938 geben 13913 baierische.

Dieser Schuh nun wird bey uns, so wie in den meisten Ländern, von den Geometern in 10 gleiche Theile abgetheilt, und so ein Theil heißt ein Zoll; der 10te Theil eines Zolles wird Linie genennt. Die übrigen Künstler theilen den Schuh nach hergebrachter Gewohnheit in 12 Zolle, und den Zoll in 12 Linien. Zum Unterschiede nennt man die erstere oder geometrische Eintheilung das Decimalmaaß (zehntheiliges Maaß), und leztere das Duodecimalmaaß (zwölftheiliges). Die Alten hatten auch noch ein größers Maaß als den Schuh, welches sie Ruthen nannten, und in obiger Rücksicht bald 10, bald 12 Schuhe hielt. Es scheint selbes aber izt aus der Mode zu kommen.

§. 5.

Aus dem angegebenen Verhältniße des baierischen Maaßes zum rheinländischen läßt sich nun folgendes Problem auflösen. Eine geographische oder deutsche Meile, wovon 15 auf einen Aequatorsgrad gehen, hält, im Durchschnitt von mehrern Angaben, 23640 rheinische Schuh. Wie viele baierische Schuh beträgt also eine Meile?

Ansatz

Baierische Schuh?	23640 rhein. Sch.
rhein. Sch. 12938	13913 baier. Sch.

Antw. 25421 baierische Schuhe nebst einem Bruche.

* Zur Uebung können noch folgende Aufgaben dienen.

1) Ein junger Mensch mißt nach baierischen Duodecimalmaaße 7 Schuh 2 Zoll, was für eine Höhe wird er bey unserm Militär nach rheinischem Maaße haben?

2) Eine alte Kirche ist 110 englische Schuhe hoch, was wird sie nach baierischen, französischen und rheinländischen Maaße für eine Höhe überall haben; da 13511. baierische = 12938 englischen Schuhen sind?

3) Ein Uhrpendel, welches in jeder Sekunde eine Schwingung macht, muß im französischen Duodecimalmaaße 3 Schuh $8\frac{1}{2}$ Linie lang seyn, was macht dieß nach unserm baierischen Duodecimalmaaße?

4) Ein Bombenmörser nach Hrn. Vega's Angabe wirft einem Versuch zufolge, 9840 Wienerschuhe weit; wie viel beträgt dieß baierische; da 14011 Wienerfuß 13913 baierische Schuhe betragen?

§. 6.

§. 6.

Wäre so eine Marmorplatte, wovon §. 1 die Rede geschah, gerade einen Schuh lang und einen Schuh breit, so hätte man einen vollkommnen Begriff von einem Quadratschuh, der zur Messung der Flächen gebraucht wird.

Der Quadratschuh hält im Decimalmaaße 100 Quadratzoll; denn man denke oder mache sich einen Quadratschuh von Papier. Es können aus selbem 10 Streifen geschnitten werden, wovon jeder einen Zoll breit und 10 Zoll lang ist. Von jedem dieser Streifen lassen sich 10 Quadratzoll herabschneiden, welches demnach nothwendig bey allen 10 Streifen 100 Quadratzolle werden müßen. — Vermög eines ähnlichen Verfahrens giebt der Quadratzoll auch ebenfalls 100 Quadratlinien.

Im Duodecimalmaaße hält ein Quadratschuh 12 X 12 d. i. 144 Quadratzoll, und dieser 144 Quadratlinien; welches sich ebenfalls wieder leicht erklären läßt.

§. 7.

Bey Verwandlung ausländischer Quadratschuhe in baierische, oder dieser in jene, muß das gegebene Verhältniß doppelt angesetzt werden, weil, wie oben §. 1 gesagt worden, bey Flächen neben der Länge auch Breite in die Rechnung zu ziehen ist. Folgende Aufgabe soll die Sache versinnlichen.

Im Innviertel hält irgend eine Wiese 140820 Quadratfüße. Wie viel solcher Füße mißt sie nach wienerischem Maaße, wenn 12938 Wienerlängenschuhe 14011 solche baierische machen?

Ansatz

Wien. Quadratsch. ?		140820 baier. Quadratsch.
in der Länge	14011	12938 in der Länge } Quadr. sch.
u.		u.
in der Breite	14011	12938 in der Breite

Antwort. 120077 wienerische Quadratschuhe.

* Noch zwey Exempel zur Uebung!

1) Ein Augsburgerjouchart hält 16000 Quadratschuh des nämlichen Maaßes; was wird selbes nach baierischen Schuhen halten, wenn 18 Augsburgerschuh beynahe $18\frac{3}{10}$ baierische auswerfen?

2) Ein baierisches Tagwerk oder Morgen hält 40000 Quadratschuh; wie viel Quadratschuhe beträgt das im rheinischen Maaße?

3) Es sollen 29 Berlinerquadratfuß und 54 derley Decimalzoll in Königsbergermaaß verwandelt werden; wie viel geben selbe? Es machen aber 1\[?\]640 Berliner = 13730 Königsbergerschuhe Längenmaaß.

§. 8.

Hätten die Ziegelsteine bey einer Mauer durchgehends einen Schuh Länge, einen Schuh Breite und einen Schuh Höhe, so würden selbe lauter Kubikschuhe seyn.

§. 9.

Der Kubikfuß hat 1000 Decimal- oder 1728 Duodecimalzolle, und der Zoll eben so viele Linien.

Denn

Denn man kann den Kubikschuh in 10 Tafeln schneiden, wovon jede einen Zoll hoch ist. Jede Tafel giebt 10 Stängchen, zu einem Zoll breit und dick, und jedes Stängchen giebt 10 Kubikzoll, folglich alle 10 X 10 X 10 = 1000, so wie beym Duodecimalmaaße 12 X 12 X 12 = 1728. Eine ähnliche Bewandtniß hat es auch mit den Kubiklinien.

§. 10.

Bey Verwandlung der kubischen Maaße verschiedner Länder in einander, müßen die Verhältniße wegen Länge, Breite und Höhe dreymal untereinander gesetzt werden, wie aus folgendem Beyspiel erhellet. Eine steinerne Säule hat 18 Pariserkubikfüße und 1240 derley Zolle Duodecimalmaaß; wie viel wird sie in rheinländischen Schuhen und Zollen halten, wenn 13913 Pariserfüße, 14400 rheinische Schuhe Längenmaaß betragen?

Ansatz

Rheinische K.?		18 Sch. 1240 Z. Pariserm.	
Paris.	13913	14400	rhein. Sch.
	13913	14400	
	13913	14400	
Zoll	1720	1 Sch.*	

Antw. 25 Kubikschuh, und nicht gar 426 Kubikzoll rheinisch.

* Folgendes mag zur Uebung dienen.

1) Ein baierisches Schäffel hält 11259 Pariserkubikzoll Duodecimalmaaß; wie viel hält es baierische Kubikschuhe und Zolle, wenn 12938 Pariserzoll Längenmaaß 14400 baierische Zolle geben?

2) Was

Burger-Schule.

2) Was machen 128 Kubikfuß Leipzigermaaß in Mannheimerschuhen; wenn 12865 Längenschuh der ersten Gattung 12520 der letztern geben?

§. 11.

Tritt der Fall ein, daß Decimalmaaß in Duodecimalmaaß oder wechselsweise verwandelt werden soll, so darf nur der Kettensatz zu Hilfe genommen werden. Das Beyspiel von einer einfachen Länge: Was machen 8 Decimalzoll und 3 Decimallinien im Duodecimalmaaße? giebt diese Anschreibung und Berechnung:

```
Duod. Zoll ? |  8 Zoll 3 Linien Decim.
        10   |  1 Zoll
        10   | 12 Duodecim. Zoll.
   ----------+----------
             | 83
               12
             ------
              166
               83
             ------+-------
              996  |  9 Zoll
              100  |
               12
             ------
              192     4
               96  |
             ------
             1152  | 11 13/25 Linien.
              200  |
```

Umgekehrt geht es eben so. Man darf nur folgende Rechnung einsehen: Was geben 11 Zoll und 8 Linien Duodecimalmaaß im Decimalmaaße?

Decim.

```
Decim. Zoll? | 11 Z. 8 L. Duod.
          12 |  1 Z.
          12 | 10 Z. Decimal.
         ----+----------
           3 | 130
           6 | 35
                5
             ------
               175 -|- 9 Zoll
                18  |
               162  |
             ------
                13
                 10 (2)
                ----
                130 -|- 7 2/9 Linien.
                 18  |
                126  |
                ----
                  4
```

* Exempel. Die baierische Elle hält 2 Schuh, 7 Zoll und $\frac{2}{5}$ Linie Decimalmaaß; wie groß ist sie im Duodecimalmaaße?

§. 12.

Zur Bezeichnung der Schuhe, Zolle und Linien bedient man sich der Strichchen, die man rechts über die Zahl hinauf schreibt. Die Schuhe haben einen Strich, die Zolle zween, und die Linien drey. Hat man auch Ruthen anzumerken, so giebt man ihnen ein Ringelchen. Die Größe $19^{\circ}\ 8'\ 5''\ 7'''$, wird demnach so gelesen: 19 Ruthen, 8 Schuhe, 5 Zolle und 7 Linien. Diese Bezeichnungsart bleibt immer die nämliche, es mag Decimal- oder Duodecimalmaaß seyn; man mag Längen- oder Flächen- oder Körpermaaß darunter verstehen; indem sich der Unterschied entweder aus den Umständen ergiebt, oder

im

im Falle man Mißverstand beförchten könnte, ausdrücklich mit Worten angemerkt wird.

Nähere Erklärungen von den Gegenständen der Geometrie.

§. 13.

Ein Punkt ist das einfachste Zeichen eines Ortes, z. B. auf dem Erdglobus das Zeichen einer Stadt. Je kleiner man denselben macht, desto näher kömmt er dem mathematischen Punkte, der lediglich gar keine Länge, Breite und Höhe hat, und eben deßwegen von uns nicht gemacht werden kann, sondern sich bloß denken läßt.

§. 14.

Eine Reihe von Punkten, wo einer an den andern stößt, ist eine Linie. Man nennt sie mathematisch, wenn sie durchgehends keine Breite hat; die wir aber schlechterdings nicht zeichnen können.

Setzt man mehrere Linien nahe an einander, ungefähr wie die Fäden eines Tuches oder einer Leinwat, so entsteht eine Fläche, welche im mathematischen Sinn gar keine Dicke haben soll.

Mehrere auf einander liegende Flächen, wie etwa die Blätter eines Buches, geben endlich einen Körper, der wiederum, mathematisch betrachtet, so beschaffen seyn muß, daß nicht der kleinste leere Zwi-

schenraum sich in selbem vorfindet. Da es aber in der ganzen Schöpfung keinen solchen Körper giebt; sondern alle bald mehr, bald weniger leere Zwischenräume haben: so begnügt man sich bloß den Raum zu messen, welchen der Körper sammt seinen Zwischenräumen ausfüllt. So füllt z. B. eine Klafter Holz mit Scheitern und Zwischenräumen 126 Kubikschuhe aus.

§. 15.

Es giebt zweyerley Linien, gerade und krumme; gerade ist jene, wo zwischen ihren beyden Endpunkten keine kürzere Linie sich ziehen läßt, sondern sie selbst die kürzeste ist. Im widrigen Fall ist die Linie krumm, oder aus mehrern geraden Linien zusammgesetzt. So ist Fig. 2 zwischen den zween Punkten a und c die Linie abc gerade, und adc krumm. Es giebt auch eine Menge Linien in der Natur, die aus geraden und krummen Linien zugleich bestehen.

§. 16.

Unter allen krummen Linien ist der Zirkel oder der Kreis die einfachste und zu Zeichnungen die nothwendigste. Er entsteht, wenn sich eine gerade Linie um einen ihrer beyden Endpunkte auf einer ebnen Fläche ganz herum bewegt. Eben wird aber dann die Fläche genennt, wenn sie aus lauter geraden Linien zusammgesetzt ist.

Jener Punkt, um welchen sich die gerade Linie herum bewegt, heißt Mittelpunkt (Centrum). Die gerade Linie selbst wird Strahl (Radius) genennt. Die krumme Linie, welche vom andern End-

punkte

punkte des Strahls beschrieben worden, bekömmt den Namen **Peripherie** oder auch **Kreislinie.** Die gerade Linie durch den Mittelpunkt, oder die zween sich entgegengesetzten Radiusse, heißt **Diameter, Durchmesser.** Die Sehne ist jede gerade Linie zwischen zween Punkten der Peripherie. Was immer für einen Theil von dieser Peripherie, er mag klein oder groß seyn, nennt man einen **Bogen** (arcus). Fig. 3 ist dieß anschaulich gemacht.

§. 17.

Man ist übereins gekommen, sich jeden Zirkel, oder eigentlicher zu reden, die Peripherie jedes Zirkels in 360 gleiche Theile abgetheilt vorzustellen, welche Theile man Grade nennt. Es ist natürlich, daß bey kleinen Zirkeln diese Grade sehr klein, bey großen hingegen auch groß ausfallen müßen. So z. B. hält ein Grad von einem Zirkel, der um die Erdkugel herumgeht, 15 deutsche Meilen.

Man theilt jeden Grad wieder in 60 gleiche Theile ab, und heißt sie **Minuten**; die Minute wird mehrmals in 60 gleiche Theile getheilt, die man **Sekunden** nennt. Eine Minute hält auf obgedachtem Zirkel des Erdbodens eine Länge von 6335, und eine Sekunde von 105 baierischen Schuhen.

§. 18.

Die Bezeichnungsart der Grade, Minuten und Sekunden ist die nämliche, so wie jene der Ruthen, Schuhen und Zollen. Die Grade bekommen rechts darüber ein kleines Null oder Ringelchen, die Minuten ein, und die Sekunden zwey Strichchen. Es heißt daher $21^{\circ}\ 14'\ 8''$ so viel als 21 Grade, 14 Minuten und 8 Sekunden.

Aber

Aber können die Ruthen, Schuhe und Zolle von Graden, Minuten und Sekunden weggekannt werden? — Freylich nicht, wenn diese Zahlen sammt ihren Zeichen so ganz allein dastehen; aber wenn man die übrigen Umstände und das, wovon eigentlich die Rede ist, nur ein bischen überdenkt, so muß es sich sogleich zeigen, ob Grade oder Ruthen u. s. f. darunter verstanden werden. Es verhält sich hier die Sache eben so, wie bey einigen Wörtern in der lateinischen Sprache, z. B. beym Worte cura. Wenn es allein dasteht, so ist der beste Grammatiker nicht im Stande zu sagen, ob es das Hauptwort oder die befehlende Art des Zeitwortes sey. Steht es aber im Kontexte, und heißt z. E. cura & labor, oder cura vt valeas, so verschwindet aller Zweifel von selbsten.

Von Messung und Theilung der geraden Linien auf dem Felde, und von Verjüngung derselben.

§. 19.

Die Linien auf dem Felde lassen sich entweder unmittelbar durch Ketten, Seile oder Stangen messen; oder man ist im Stande ihre Länge mittels Schlüße und Folgerungen herausbringen. Von der letztern Art können wir bis daher noch nichts sagen, wohl aber von der erstern.

§. 20.

Man bedient sich gegenwärtig meistens der eisenen Ketten, welche der Bequemlichkeit zu lieb aus

100

100 Gliedern besteht, wovon jedes einen Schuh mißt. Nach 10 Schuhen kömmt allemal ein Gelenk von Meßing, das mit dem entsprechenden Numer bezeichnet ist.

§. 21.

Will man eine Linie auf dem Felde wirklich messen, so steckt man in die beyden Endpunkte Fahnen, oder bey kleinen Entfernungen auch Stäbe ein. Es wird aber hier vorausgesetzt, daß man von einem Endpunkte zum andern sehen könne, und also kein Hinderniß z. B. ein Gehölz, Berg u. d. gl. dazwischen aufstosse.

Bey einem dieser Endpunkte wird der letzte Ring der Meßkette befestigt, sie selbst aber von einer zweyten Person, die der Kettenzieher heißt, beym ersten Ring ergriffen, und so lange in der Richtungslinie fortgezogen, bis sie ganz ausgestreckt ist. Man muß aber dabey Acht haben, ob nicht irgend ein Ring überschlagen oder sonst ein Glied verrenkt sey.

Nun stellt sich der Feldmesser hinter die Fahne oder den Stab, wo die Kette befestigt ist, und winkt den Kettenzieher so lange rechts oder links, bis desselben Stab, den er in dem ersten Ring der Kette gesteckt hält, sich mit den Stäben der beyden Endpunkte in einer Linie befindet; das heißt mit andern Worten; bis des Feldmessers Aug hinter seinen Stab weder den Stab des Kettenziehers, noch den Endpunkt der zu messenden Linie erblickt.

Hier

Hier wird ein kleiner Holzspalt oder sogenannter Pflock eingeschlagen, dann die Kette beym letzten Ringe losgelassen, und so lange wieder fortgezogen, bis der letzte Ring an den eben besagten Pflock angesteckt werden kann.

Der Kettenzieher wird mehrmal durch Winken zurecht gewiesen, ein neuer Pflock eingeschlagen, und so fortgefahren, bis man zu Ende ist.

So viel nun Pflöcke gebraucht werden, so oft hat man 100 Schuhe. Vom letzten Pflocke bis zum erreichten Endpunkte können die noch übrigen Schuhe, wenn man die Kette daran hingezogen hat, leicht gezählt, und dazu addiert werden. Z. B. es wären 7 Pflöcke eingeschlagen, und vom siebenten Pflocke bis zum Endpunkte noch 38 Schuhe befunden worden, so hielt die Linie 738 Schuhe.

§. 22.

Will man solche Linien zu Papier bringen, so müßen selbe beträchtlich kleiner gemacht werden, welches man **Linien verjüngen** heißt. Eine Gegend aufnehmen will daher nichts anders sagen, als sie so klein machen, daß sie sich in einer ähnlichen Gestalt zu Papier bringen läßt. Meistentheils werden die Linien auf dem Felde 4000mal kleiner, als sie wirklich sind, auf das Papier aufgetragen: manchmal auch 6000 mal kleiner *). Dieß kann man mittels

einer

*) Von dieser letztern Art ist der vom Hrn. Mettenleiter in Kupfer gestochene Plan des in Kultur stehenden Donaumooses.

einer sogenannten Skale leisten; man versteht darunter weiter nichts anders als einen verjüngteu Maaßstab, auf welchen der landesübliche Schuh in so viel gleiche Theile getheilt ist, als man verlangt. Man ist dadurch in Stand gesetzt, kürzere Linien in Schuhen, Zollen und Linien verjüngt aufzutragen, oder auch große Linien, wobey nur auf Schuh und nicht mehr auf Zolle, noch weniger auf Linien gesehen werden kann, zu verjüngen.

§. 23.

Aufgabe. Eine namhafte Länge von Schuhen, wobey man nicht auf Zolle geschweigens auf Linien sehen kann, zu verjüngen.

Auflös. Aus der 4ten Figur erhellet, daß die Skale durch Zwerchschnitte in mehrere Hauptfächer eingetheilt, und das oberste Fach derselben mit dicht neben einander gezognen Querlinien versehen sey. Wenn nun die gegebene Anzahl der Schuhe aus Hunderter, Zehner und Einheiten besteht, so setzt man den einen Fuß des Handzirkels an jenen Zwerchschnitt hin, wo die verlangte Zahl der Hunderter angemerkt steht, eröffnet den andern Fuß bis an jenes Ziffer im Fache der Querlinien, das die gegebnen Zehner anzeigt, ziehe sodann den Zirkel unverrückt und mit beyden Schenkeln zugleich von der Linken zur Rechten auf der heruntern Querabtheilung fort, bis man jene Senklinie erreicht, welche oben mit der verlangten Zahl der Einheiten bemerkt ist; so wird der obere Schenkel die schiefe, aufwärtsgehende Querlinie in etwas verlassen haben. Wenn nun die Zirkelöffnung bis

zur

zur selben erweitert wird, so hat man die vorgegebene Linie im verjüngten Maaße aufgefaßt, und kann nun leicht zu Papier gebracht werden. Die in der Figur vorgestellte Zirkelöffnung hält daher 186 Schuhe.

Hat die Anzahl der gegebnen Schuhe keine Einheiten, sondern bloß Hunderter und Zehner, so fällt das Herüberziehen des Zirkels von selbst weg.

§. 24.

Ist der Maaßstab zu Verjüngung einer Linie zu klein, so wird die Skale selbst so oft aufgetragen, als oft die Anzahl der darauf verzeichneten Schuhe in der gegebenen Linie enthalten ist, und der Rest nach obiger Anweisung daran gesetzt. Wie oft aber die Skale in der gegebnen Anzahl Schuhe enthalten sey, und was der Rest noch betrage, weiset die Division.

Es soll z. B. auf unsrer Skale, die nur 400 Schuhe mißt, eine Länge von 1128 Schuhen verjüngt werden. Die Division 1128 : 400 giebt 2 Skalelängen und noch 328 Schuhe zum Reste. Man trägt daher den ganzen Maaßstab zweymal auf eine Linie hin, und setzt nach obiger Anweisung §. 23. die 338 Schuhe noch daran, so ist das Geschäft zu Ende.

* Exempel. Die hiesige Stiftskirche zu unser lieben Frau ist 336 Schuhe lang (so hoch sind auch die beyden Thürme), und 128 Schuhe breit. — Die hiesige Maltheserkirche hat 284 Fuß Länge und 114 Fuß Breite. — Die Kirche der Theatiner mißt in der Länge 256 und in der Breite 126 Fuß. Man verjünge diese 6 gegebenen Größen!

§. 25.

Aufgabe. Eine gegebne Länge von Schuhen, Zollen und Linien, dergleichen in der Baukunst vorzukommen pflegen, durch Hilfe des nämlichen Maaßstabes zu verjüngen.

Auflös. Man lasse auf dem Maaßstabe das, was vorhin §§ 23 u. 24. für 100 Schuhe angenommen worden, nur für einen Schuh gelten; das was vorher 10 Schuh gegolten, gelte einen Zoll u. s. f., so ist die zehnfache Abstuffung eben so gut auch auf Schuh, Zoll und Linie anwendbar: vorausgesetzt, daß es Decimalmaaß sey; denn im widrigen Falle müßte das Duodecimalmaaß nach obiger Anleitung §. 11. erst in solches verwandelt werden. Es hält demnach die Zirkelöffnung, welche §. 23. 186 Schuhe gemessen, in diesem Falle 1 Schuh, 8 Zoll und 6 Linien; so wie die §. 24. von 1128 Schuhen hier 11 Schuhe, 2 Zoll und 8 Linien beträgt.

* Exempel. Karl möchte gerne die Mannheimerelle und die Münchnerelle nebeneinander verjüngt sehen. Es gilt ihm gleich, nach welchem Maaßstabe. Die erstere hält, wie schon einmal gesagt worden, 2 Schuh, 7 Zoll und die letztere 4 Schuh und 5 Linien, alles Decimalmaaß. Man befriedige Karls Wunsch!

§. 26.

Oft ereignet sich's auch, daß man Linien, die schon zu Papier gebracht sind, messen soll. Die Sache hat keine Schwierigkeit. Man faßt die zu messende Linie mit dem Handzirkel auf, und zieht denselben solang mit einem Schenkel auf einer heruntern

Zwerchabtheilung, und mit dem andern oben in den engen Querfächern fort, bis diese obere Spitze irgendwo genau einfällt. Die entsprechende Zahl ist daß Maaß einer solchen Linie.

Von Winkeln, deren Eintheilung und Messung.

§. 27.

Wenn zwo gerade Linien sich schneiden, oder mit ihren Endpunkten einander berühren: kurz, wenn zwo Linien irgendwo einen Punkt gemeinschaftlich haben, so entstehen Winkel. So ein gemeinschaftlicher Punkt nun heißt der Scheitel des Winkels, und die beyden vom Scheitel ausgehenden Linien werden Schenkel genannt. Die Winkel sind in der Meßkunst oft ein nothwendiges Bedürfniß. Man theilt sie ein in rechte, spitzige und stumpfe Winkel. Recht ist der Winkel, wenn sich mit einem Handzirkel aus dem Scheitelpunkt von einem Schenkel zum andern ein Bogen von 90°, oder der vierte Theil der Peripherie, beschreiben läßt. Wird der Bogen kleiner als 90°, so heißt der Winkel spitzig, wird er größer, stumpf. So ist z. B. Fig. 4 ein rechter, Fig. 5 ein spitziger und Fig. 6 ein stumpfer Winkel.

Hat der Bogen zwischen zween Schenkeln 180°, so verschwindet der Winkel, und die zween abgeschnittenen Schenkel machen eine gerade Linie, nämlich den Diameter aus.

Ist gähling der Bogen größer als 180°, wie Fig. 7, so heißt der Winkel ausspringend.

§. 28.

Die Schenkel eines rechten Winkels werden Lothen oder Perpendikel genennt, oder man sagt, daß eine Linie auf der andern lothrecht, senkrecht oder perpendikulär stehe.

§. 29.

Es gilt gleichviel, ob man die Schenkel eines Winkels lang oder kurz macht; weil bloß die Lage der Schenkel gegen einander die Größe des Winkels bestimmt. Eben so willkührlich ist es, den Zirkelbogen als Maaß des Winkels mit einem großen oder kleinen Radius zu beschreiben; weil dadurch nicht die Anzahl der Grade, sondern bloß die Größe derselben geändert wird. Ein rechter Winkel hat allemal den vierten Theil des Zirkels, das ist, 90° zum Maaße, es mag der Zirkel groß oder klein seyn, und ein spitziger Winkel wird nie 90° zum Maaße erhalten können, man mag die Schenkel und den Radius so groß annehmen, als man will.

§. 30.

Winkel werden auf zweyerley Weise bezeichnet, entweder mit drey Buchstaben oder mit einem. Ist das erste, so setzt man die Buchstaben an die Endpunkte der Schenkel, und nennt oder schreibt allemal jenen Buchstaben in der Mitte der am Scheitel steht. Im zweyten Fall stellt man einen geschmeidigen Buchstaben, als m, n, x, o u. d. gl. in die Neigung hinein. Daher Fig. 5 der Winkel a c b oder b c a; nicht c b a oder a b c: und Fig. 6 der Winkel m.

§. 31.

Um Winkel, die schon auf dem Papiere gezeichnet sind, wirklich zu messen, oder gegebene Winkel zu Papier zu bringen, hat man ein eigenes dazu bestimmtes Instrument, das man Transportär heißt, und einen in 180° abgetheilten halben Zirkel vorstellt. Fig. 8 ist ein Entwurf davon. Soll nun ein Winkel auf dem Papiere gemessen werden, so bringt man den Mittelpunkt c an den Scheitel des gegebnen Winkels, läßt einen der beyden Schenkel (es ist gleich viel welchen) von einem Halbmesser decken, und sieht, wie viel Grade der andere Schenkel abschneidet.

Es befinden sich aber auf dem Transportär zwo Reihen von Gradzahlen, die gegen einander laufen. Man muß daher allemal jene Reihe als geltend ansehen, die sich bey einem Schenkel des Winkels anfängt, und beym andern Schenkel aufhört oder wenigst abgeschnitten wird. In unsrer Figur hat demnach der Winkel a c d nicht 150°, sondern 30°, obgleich der Schenkel a c beyde Zahlen abschneidet; weil die Reihe, wo 30° abgeschnitten werden, beym andern Schenkel d c zu zählen anfängt. Die Zahl 150° wäre nur dann zu gebrauchen, wenn allenfalls der stumpfe Winkel a c f gemessen werden müßte.

§. 32.

Man sieht daraus, daß man auf diese Art die Winkel nur in Graden, und nicht zugleich auch in Minuten oder Sekunden zu messen im Stande ist. Indeß kann ein gutes Aug noch immer halbe und

Viertelsgrade unterscheiden, womit man sich also gleichwohl begnügen muß.

§. 33.

Soll ein gegebner Winkel aufgetragen werden, so mache man allererst eine Linie, lege den Mittelpunkt des Instruments auf jenen Endpunkt, wo der Scheitel des Winkels zu stehen kommen soll, bedecke die Linie mit dem Halbmesser, und mache bey jener Zahl, die die gegebnen Grade anzeigt, und dessen Reihe auch bey der Linie anfangen muß, einen Punkt auf das Papier. Zieht man nun von diesem Punkte bis an den Scheitelpunkt eine Linie, so ist das Geschäft fertig.

* Exempel 1) Die Ekliptik durchschneidet den Aequator unter einem Winkel von $23\frac{1}{2}^{\circ}$; wie sieht dieser Winkel, zu Papier gebracht, aus?

2) Die Erdachse durchschneidet den Münchnerhorizont unter einem Winkel von $48\frac{1}{2}^{\circ}$, und den Horizont von Petersburg unter $55\frac{1}{2}^{\circ}$; man bringe diese beyden Winkel zu Papier!

§. 34.

Wenn aus irgend einem Punkte einer geraden Linie eine andere oder auch mehrere gezogen werden, so heißen die dadurch entstandnen Winkel Nebenwinkel, wie etwa Fig. 9 x und y, dann Fig. 10 m, r und s.

Neben-

Nebenwinkel halten allemal miteinander 180°; denn aus ihrem gemeinschäftlichen Scheitelpunkte läßt sich ein halber Zirkel als ihr Maaß beschreiben; weil die ursprüngliche gerade Linie dadurch zum Diameter wird, und den ganzen Zirkel in zween gleiche Theile theilt. Ein halber Zirkel hält aber nach §. 17. $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$.

* Wünscht man etwa den Beweis dieses Satzes, so wie mehrere in der Folge lieber algebraisch zu sehen, so müßen ein für allemal nachstehende Grundwahrheiten vorangeschickt werden:

1) Wird Gleiches zu Gleichen addiert, so bleibt die Gleichheit.

Z. B. Karl sowohl als Fritz hat jeder 5 fl., folglich gleich viel: giebt man nun jedem noch 2 oder 3 fl., oder was immer, so haben sie am Ende allemal gleich viel.

2) Wird Gleiches von Gleichen abgezogen, so bleibt die Gleichheit.

Nimmt man Karln sowohl als Fritzen von den 5 fl. gleich viel, etwa 1 fl., 2. u. d. gl., so bleibt ihnen allemal wieder gleich viel.

3) Multipliciert man Gleiches mit Gleichem, so erhält man die Gleichheit.

4) Dividiert man Gleiches durch Gleiches, so wird die Gleichheit auf keine Weise gestört.

5) Man kann in jeder Größe Gleiches für Gleiches setzen (substituieren), ohne ihren Werth zu ändern.

Wenn jemand einen Gulden Geld hat, und ein andrer giebt statt einem Zwölfer, der sich dabey befindet, zween Sechser, oder 4 Groschen, so hat er so viel wieder als zuvor.

6) Wenn

6) Wenn zwo Größen irgend einer dritten Größe gleich sind, so sind die beyden Größen unter sich ebenfalls gleich.

Vier Laubthaler sind so viel werth, als eine Karoline: 55 Zwölfer sind auch so viel werth, als eine Karoline; also haben 4 Laubthaler, und 55 Zwölfer einerley Werth.

Es sieht nun die algebraische Beweisführung über die Wahrheit, daß alle Nebenwinkel zusammen 180° halten, so aus.

Satz.

Fig. 10. $m + r + s = 180^\circ$

Beweis.

$$m = ad$$
$$r = ab$$
$$s = bc$$

$$m + r + s = ad + ab + bc$$

aber $ad + ab + bc = 180^\circ$

also $m + r + s = 180^\circ$.

§. 35.

Wenn also von zweenen Nebenwinkeln einer bekannt ist, so weiß man auch das Maaß des andern; denn das, was dem bekannten von 180° noch abgeht, muß der andere zum Maaße haben. Z. B. Einer von zweenen Nebenwinkeln hat 37° 19′, was mißt der andere?

Ansatz.

	180°	
	37°	19'
Antw.	142°	41'.

* Exempel. Der Sonnenstrahl macht am Mittage des Sommeranfangs mit dem Münchnerhorizonte gegen Süden einen Winkel von 64° 52', am Mittage des Herbst- und Frühlinganfangs 41° 22' und am Mittage des Winteranfangs 17° 52'; wie groß ist allemal der Winkel, den der Sonnenstrahl mit unserm Horizonte gegen Norden macht?

§. 36.

Wenn einer von zweenen Nebenwinkeln ein rechter ist, so muß auch der andere ein rechter seyn; denn 90° + 90° = 180°.

§. 37.

Zwo gerade Linien, die sich durchschneiden, bilden zween und zween sich entgegen gesetzte Winkel, die man Scheitelwinkel (Vertikalwinkel) nennt, wie Fig. 11 o und x, dann y und m.

§. 38.

Vertikalwinkel sind gleich; denn jeder läßt sich durch den nämlichen dritten Winkel zu 180° ergänzen. So hält z. B. der Winkel o mit dem Winkel y eben so gut 180°, als x mit dem nämlichen y; weil man allemal Nebenwinkel bekömmt.

*) Algebraische Form des Beweises.

Sätze.

1) $o = x$

2) $y = m.$

Beweise.

1) $o + y = 180°$
$y + x = 180°$ } als Nebenw.

$$o + y = y + x$$
$$- y - y$$
$$o = x.$$

2) $y + x = 180°$
$x + m = 180°$

$$y + x = x + m$$
$$- x - x$$
$$y = m.$$

§. 39.

Ist von 4 Vertikalwinkeln einer bekannt, so sind alle vier gegeben. Denn man ziehe den bekannten Winkel von 180° ab, so bleibt sein Nebenwinkel. Da nun jeder dieser Winkel seinen gleichen Vertikalwinkel hat, so sind nothwendig alle 4 Winkel bekannt. Es halte z. B. der Winkel o genau 30° 47′; folglich der Nebenwinkel laut Rechnung

180		
30	47	
149°	13′	als stumpfer Winkel,

folglich auch $x = 30° \ 47'$ und $m = 149° \ 13'$.

§. 40.

Aufgabe. Einen Winkel auf dem Felde zu messen.

Auflös. Man setze den Winkelmesser, (Winkelscheibe) welcher ein auf das Stativ gesetzter, und in seine Grade eingetheilter Zirkel ist, in den Scheitel des Winkels, und ziele durch die Dioptern (Absehen) des herumbeweglichen Lineals, oder durch das darauf angebrachte Sehrohr nach den Endpunkte eines Schenkels, welche man beyde im Bedärfungsfalle durch aufgesteckte Fahnen oder Stäbe sichtbar machen kann.

Eigentlich ist das so zu verstehen. Man drehet das Diopternlineal oder das Sehrohrlineal (man nennt es allgemein die Alhidade) dahin, wo die Grade mit Null anfangen. Nun wird die bewegliche Scheibe sammt der unverrückten Alhidade so lange umgedreht, bis man durch diese letztere den einen der Endpunkte des Winkels erblickt. Man befestigt itzt die Scheibe durch eine Schraube, bewegt die Alhidade allein nach dem andern Endpunkt, und zählt die Grade, die die Alhidade abschneidet, so ist die Größe des Winkels bestimmt. Fig. 12 suchte ich den Begriff hievon in etwas zu versinnlichen, wo ein Winkel, den zwo Baumalleen miteinander machen, gemessen wird.

§. 41.

§. 41.

Oft läßt sich der Nebenwinkel oder ein Vertikalwinkel bequemer messen; in welchen Fällen man dann allemal nach §§. 35 u. 38. auf die Größe des eigentlichen Winkels zu schließen im Stande ist.

Von den Parallellinien.

§. 42.

Wenn zwo gerade Linien solch eine Lage gegeneinander haben, daß sie, man mag sie beyde vorwärts oder rückwärts verlängern, sich weder einander nähern, noch voneinander entfernen, so heißen selbe Parallellinien. Man drückt die Parallelität (Parallelismus) zwoer Linien durch das Zeichen ‡‡ aus.

§. 43.

Aufgabe. Man giebt eine Linie, und es soll eine andere damit in einer bestimmten Entfernung parallel gezogen werden.

Auflös. Wenn die Entfernung durch irgend einen Punkt bestimmt worden, so setzt man den Handzirkel in den gegebenen Punkt ein, und öffnet ihn so weit, bis er die Linie berührt, aber nicht schneidet. Mit dieser Oeffnung setzt man den Zirkel in einer beliebigen Entfernung in die Linie ein, und beschreibt einen Bogen. Durch den Punkt wird nun eine solche Linie gezogen, daß sie den Bogen nur berührt, und wenn man sie verlängert, ihn nicht durchschneidet. Diese Linie ist mit der gegebnen parallel.

Denn

Denn sie ist nirgends weiter als um die Länge des Radius von der andern entfernt.

Es sey z. B. Fig. 13 die Linie f g und der Punkt a gegeben. Man suche den Abstand desselben von f g, nämlich a b, setze den Zirkel in d oder g ein, beschreibe einen Bogen darüber, und ziehe die Linie a c, so ist a b = c d die Parallelweite.

§. 44.

Durchschneidet man eine dieser Parallellinien mittels einer dritten geraden Linie, wo immer, Fig. 14. so entstehen nach §. 37 **Vertikalwinkel**; und wenn die schneidende Linie in der nämlichen Richtung so lange fortgeführt wird, bis sie auch die andere schneidet, so bilden sich auch hier die nämlichen Vertikalwinkel, wie bey der erstern. Denn jede dieser beyden Parallellinien behält mit der schneidenden Linie die nämliche Lage bey, sie mögen weit von einander entfernt seyn oder nicht. Rückt man sie immer näher und näher zusammen, bis sie eine einzige Linie ausmachen, so sind die beyderley Vertikalwinkel in einerley verwandelt worden. Folglich waren sie vorher an Größe nie voneinander unterschieden. Fig. 14 ist daher y = Y, auch x = X, o = O und r = R. Nach der Kunstsprache zu reden, heißen y und Y, oder x und X, oder r und R, oder endlich o und O innere und äußere Winkel. Ferner nennt r und Y, so auch o und X **Wechselwinkel**; weil einer diesseits, der andere jenseits der schneidenden Linie, der eine oben, der andere unten zu stehen kömmt, folglich nach Ort und Lage wechseln. Endlich heißen o und Y oder r und X innere Winkel zwischen Parallelen.

§. 45.

Zween innere Winkel machen allemal zusammen 180°. Denn y und o halten als Nebenwinkel 180°; da aber y und Y gleich große Winkel sind, so ist es einerley, ob ich zum Winkel o das y oder das Y nehme, ich bekomme allemal 180°. Eben so geht der Beweis für die innern Winkel r und X.

§. 46.

Die Wechselwinkel sind gleich. Denn es ist gleich viel, ob man den Winkel o zum Winkel r oder zum Winkel Y rechnet; man bekömmt in jedem Falle 180°: im ersten Falle als Nebenwinkel im zweyten nach §. 44 als innere Winkel.

§. 47.

Jeder äußere Winkel ist dem innern entgegenstehenden Winkel gleich, z. B. y dem Y; denn der Winkel o ergänzt jeden zu 180°.

* Hier folgen auch die algebraischen Beweise dieser drey

Sätze

1) $o + Y = 180°$

2) $r = Y$

3) $y = Y$

Beweise.

1) $o + y = 180°$

aber $y = Y$

substituirt $o + Y = 180°$.

2)

2) $o + Y = 180^\circ$; wie eben erwiesen worden.
$o + r = 180^\circ$.

$$\frac{}{o + r = o + Y}$$
$$\frac{-o \quad -o.}{r = Y.}$$

3) $o + Y = 180^\circ$
$o + y = 180^\circ$

$$\frac{}{o + Y = o + y}$$
$$\frac{-o \quad -o}{Y = y.}$$

Von Flächenfiguren, vorzüglich von Dreyecken.

§. 48.

Eine Flächenfigur ist ein von Linien allenthalben begränzter Raum. Die Gränzen können entweder gerade oder krumme Linien seyn. Wir handeln hier von der erstern Gattung Flächen, und nehmen von der letzten bloß die Zirkelfläche vor die Hand.

§. 49.

Da zwo gerade Linien keinen Raum allenthalben einzuschließen vermögen, sondern höchstens einen offenen Winkel bilden können, so muß man zur Anlegung einer Flächenfigur wenigst drey solche Linien haben, um nämlich mit der dritten Linie den Winkel zu schließen.

§. 50.

So oft man eine Linie unter einer verschiedenen Richtung auf eine andere stoßen läßt, so viele Winkel oder Ecke erhält man auch. Von der Anzahl der Ecke nun bekommen die verschiedenen Gattungen der Flächenfiguren ihre Benennungen. Stossen drey Linien zusamm, so giebt es Dreyecke, bey vieren Vierecke, bey fünfen Fünfecke u. s. w. Die Linien selbst, welche diese Flächen begränzen, werden die Seiten derselben genennt.

§. 51.

Man mag bey Dreyecken auf die Winkel oder auf die Seiten Rücksicht nehmen, so erhält man in jedem Betracht dreyerley Klassen derselben. Schließt man einen rechten Winkel, so ist das Dreyeck rechtwinklicht. Schließt man einen stumpfen Winkel, so wird das Dreyeck stumpfwinklicht. Weiß man endlich einen spitzigen Winkel so zu schließen, daß die beyden übrigen Winkel auch spitzig werden, so erhält man ein spitzwinklichtes Dreyeck.

In Rücksicht der Seiten giebt es gleichseitige, gleichschenklichte, wo nämlich zwo Seiten einander gleich sind, und ungleichseitige.

§. 52.

Aufgabe. E i n g l e i c h s e i t i g e s, ein g l e i c h s c h e n k l i c h t e s, und ein u n g l e i c h s e i t i g e s Dreyeck zu zeichnen.

Auflös.

Aufl. Zur Zeichnung eines gleichseitigen Dreyeckes wird nur eine Linie z. B. Fig. 15 das b gegeben. Man setzt den Handzirkel auf einen Endpunkt derselben hin, und eröffnet ihn bis zum andern Endpunkt. Mit dieser Oeffnung, die die gegebne Linie zum Maaße hat, beschreibt man aus den besagten Endpunkten ober = oder unterhalb Bögen, die sich durchkreuzen, und verbindet den Durchkreuzungspunkt mit den beyden Endpunkten durch gerade Linien, so ist die Foderung erfüllt.

Zur Zeichnung eines gleichschenklichten Dreyeckes giebt man zwo Linien, wie etwa Fig. 16 b und c, eine zur Grundlinie (basis), und die andere zu den Schenkeln, welche aber allemal größer, als die halbe Grundlinie seyn muß; weil sich selbe sonst nicht über die Grundlinie erheben könnten, sondern auf ihr liegen blieben. Man nimmt demnach die Länge des Schenkels mit dem Handzirkel auf, und beschreibt mit dieser Oeffnung aus den Endpunkten der Grundlinie über oder unter derselben Bögen, die sich irgendwo durchschneiden, und verfährt übrigens wie oben.

Will man ein ungleichseitiges Dreyeck verzeichnen, so muß man drey verschiedene Linien geben, wovon aber allemal wieder zwo zusammen, größer als die dritte seyn müßen. Eine von diesen nimmt man zur Grundlinie, und erwählt gemeiniglich die größte dazu. Mit einer andern von den übrigen zwoen wird über der Basis ein solcher Bogen beschrieben, daß man ihn aus dem andern Endpunkt mit der dritten gegebenen Linie durchschneiden könne. Wird nun dieser

ser Durchschnittspunkt mit den beyden Endpunkten der Grundlinie durch neue Linien verbunden, so hat man das verlangte Dreyeck, wie aus Fig. 17 erhellet.

*) Exempel Ein Bauer besitzt drey Grundstücke, wovon jedes ein Dreyeck vorstellt. Sein Obstgarten ist gleichseitig, und es hält eine Seite 275': der Acker von ihm ist gleichschenklicht, ein Schenkel hievon ist 844', und die Basis 229' groß: die Wiese endlich hat lauter ungleiche Seiten, und messen 528', 654' und 811'. Man bringe diese drey Grundstücke nach irgend einem verjüngten Maaßstabe zu Papier.

§. 53.

Die drey gegebnen Seiten eines Dreyeckes mögen zusammgesetzt werden, wie sie wollen, so entsteht allemal das nämliche Dreyeck. Um sich davon zu überzeugen, darf man nur alle möglichen Fälle der Zusammensetzung durchgehen.

Es bleibe Fig. 17 c als Grundlinie, aber a und b werden vertauscht, so daß man a rechts und b links daransetzt: In diesem Falle darf nur die Grundlinie völlig umgeschlagen werden, damit der Endpunkt o nach m, und der Endpunkt m nach o kömmt, so ist es eben soviel, als wenn ich das Dreyeck der erstern Zusammensetzung selbst umgewendet hätte. So wenig also das Dreyeck durch das Umwenden verändert wird; so wenig leidet es durch das Vertauschen der zwo Seiten a und b.

Es

Es werde b die Grundlinie; man setze c links und a rechts daran. Wird nun im gegenwärtigen Fall das Dreyeck so lange gewendet, bis b horizontal liegt, so erhält man völlig das vorige Dreyeck.

Es bleibe b die Grundlinie, aber a komme links und c rechts daran zu liegen. — Man schlage b wieder um, daß m nach x und a nach m kömmt, so hat man die nämliche Zusammensetzung wie vorher. Eben so verhält sichs auch, wenn a als Grundlinie genommen wird. Es kann also allgemein behauptet werden, daß einerley Seiten auch einerley Dreyecke geben.

Von der Kongruenz der Dreyecke.

§. 54.

Zwey oder mehrere Dreyecke, auch andere Flächenfiguren nicht ausgenommen, sind kongruent (übereintreffend), wenn bey gehöriger Uebereinanderlegung derselben sich alles wechselseitig deckt. Solche Größen sind demnach einander vollkommen gleich und ähnlich.

§. 55.

Das Zeichen der Kongruenz ist $\cong$, wovon ein Bestandtheil die Gleichheit, das liegende S hingegen die Aehnlichkeit (Similitudinem) ausdrückt.

*) Die Lehre von der Kongruenz der Dreyecke ist von der größten Wichtigkeit; weil sie den Grund der ganzen Geometrie enthält. Sie kann daher Anfängern nicht genug empfohlen werden.

§. 56.

Zwey Dreyecke, wo man überall die nämlichen Seiten antrifft, sind kongruent; weil sich die Gränzen vollkommen einander decken, folglich auch die begränzten Flächen selbst.

§. 57.

Zwey Dreyecke, wo überall eine Seite und die daranstossenden Winkel gemeinschaftliches Maaß haben, sind kongruent; denn die Seite deckt die Seite, und die daranliegenden Winkelschenkel des einen Dreyeckes, die vom andern Dreyecke, und zwar bis zu ihrer Durchschneidung.

§. 58.

Zwey Dreyecke, wo überall irgend zwo Seiten und ihr Zwischenwinkel gemeinschaftliches Maaß haben, sind mehrmal kongruent. Denn der Winkel deckt den Winkel, und die Schenkel kel die Schenkel bis zu ihren Endpunkten. Von einem Endpunkt zum andern kann aber nur eine gerade Linie gezogen werden; folglich decken auch diese einander.

§. 59.

Da in jedem Dreyecke die Größe einer Seite, von der Größe des Gegenwinkels abhängt, oder auch umgekehrt, so stehen in kongruenten Dreyecken den gleichen Winkeln, auch gleiche Seiten entgegen; und wechselweise, gleiche Seiten haben gleiche Gegenwinkel. Wenn demnach Fig. 18 A und B kongruente

gruente Dreyecke sind; wenn in selben die Seiten a und d gleiche Grössen haben, so müßen auch die Winkel m und y gleich seyn; denn diese decken sich ebenfalls einander. Der Schluß gilt auch umgekehrt. Wenn man weiß, daß in zweyen kongruenten Dreyecken z. B. in A und B die Winkel x und s einander gleich sind, so darf man auch behaupten, daß ihre Gegenseiten b und g ebenfalls die nämliche Länge haben.

Anwendung der Dreyeckskongruenz bey leichten Aufgaben und Sätzen.

§. 60.

Aufgabe. Einen Winkel in zween gleiche Theile zu theilen.

Auflös. Man setze den Handzirkel in den Scheitel des Winkels ein, schneide jeden Schenkel mit der nämlichen Oeffnung durch, setze den Zirkel in diese Durchschnittspunkte ein, und beschreibe mit gleicher Oeffnung auswärts Bögen, die sich durchkreutzen, und verbinde den Scheitel mit diesem Durchkreutzungspunkte, so ist der Aufgabe ein Genüge geschehen.

Beweis.

Wenn man Fig. 19 die letztere Zirkelöffnung durch wirkliche Linien sichtbar macht, und sie an den Durchkreutzungspunkt zusammenführt, so entstehen wegen den nämlichen Linien überall zwo kongruente Dreyecke, wo den gleichen Zirkelöffnungen b c und

d e

d c auch gleiche Winkel entgegen stehen, nämlich o und x, welches die beyden Theile des gegebenen Winkels sind.

*) Algebraische Stellung des Beweises.

Satz.

$o = x$

Beweis.

$ab = ad$

$bc = dc$

$ac = ac$

also $\triangle abc \cong \triangle adc$

und weil $bc = dc$

so ist auch $o = x$.

§. 61.

Aufgabe. Eine gerade Linie in zween gleiche Theile zerschneiden.

Auflös. Man beschreibe über die gegebene Linie ein gleichschenklichtes Dreyeck, und theile den Winkel, den die beyden Schenkel bilden in zween gleiche Theile, so wird auch dabey die Linie gleich getheilt seyn.

Beweis.

Die Theilungslinie zerschneidet Fig. 20 das gleichschenklichte Dreyeck in zwey kongruente Dreyecke; weil überall zwo Seiten sammt dem Zwischenwinkel die nämlichen sind. Da nun den beyden gleichen Winkeln o und m, a c und c b als Seiten entgegen stehen, so müßen selbe nothwendig gleiche Länge haben.

*) Die

*) Die Algebra stellt das Gesagte so in Ordnung.

Satz.

ac = cb

Beweis.

ad = db

dc = dc

o = m

---

also △adc ≌ bcd und

weil o = m so ist auch

ac = cb.

§. 62.

Aus diesem Beweise fließt noch der Satz, daß in gleichschenklichten Dreyecken die Winkel an der Basis allmal gleich sind; denn beyde stehen der nämlichen Seite dc entgegen.

§. 63.

Weil man in gleichseitigen Dreyecken jede Seite für die Basis annehmen, und das Dreyeck als gleichschenklicht betrachten kann, so folgt noch ferner daraus, daß die Winkel in einem gleichseitigen Dreyecke alle einander gleich sind.

§. 64.

Aufgabe. Auf eine Linie einen Perpendikel aufrichten, oder einen rechten Winkel zeichnen.

Auflös.

Auflös. Ist der Punkt, wo das geschehen soll, in der Linie selbst; so setzt man den Handzirkel in selben ein, und schneidet zu beyden Seiten gleiche Stücke ab, errichtet auf selben ein gleichschenklichtes Dreyeck, so ist die Linie, die von der Spitze auf den Punkt hinabfällt ein Perpendickel, oder mit andern Worten, die Nebenwinkel, die diese Linie macht, sind gleich, und hält daher jeder 90°. Denn die beyden Dreyecke sind wegen Gleichheit der Seiten kongruent, und den gleichen Schenkeln stehen die bemeldten Winkel entgegen, folglich sind sie gleich, und hält jeder $\frac{180°}{2} = 90°$.*

Wäre der Endpunkt gegeben, so müßte die Linie um ein Stück verlängert werden, um die nämliche Auflösung zu bewerkstelligen.

Befindet sich der Punkt über oder unter der Linie, so wird der Handzirkel wieder in den Punkt eingesetzt, und aus selbem die Linie zweymal durchschnitten. Errichtet man nun auf diesen Durchschnittspunkten ein gleichschenklichtes Dreyeck, und theilt den Winkel, den die beyden Schenkel bilden, in zween gleiche Theile, so fällt die Theilungslinie perpendikulär auf die gegebene Linie hin. Der Beweis ergiebt sich aus der Kongruenz der Dreyecke von selbst.

*) In Fällen, wo am Endpunkte einer Linie ein Perpendikel aufgerichtet werden soll, giebt es zwar bequemere Methoden, als die obige, und lassen sich auch auf die übrigen beyden Bedingungen anwenden: aber ihre Richtigkeit zu beweisen, müßten noch einige Sätze vorausgehen, die theils zu schwer, theils für unsern Zweck entbehrlich sind. Ich will sie also hier, außer dem Systeme dieser

klei-

kleinen Schrift, als ein Paar praktische Kunstgriffe anführen.

Erste Methode. Man setzt den Handzirkel außer der Linie irgendwo ein, doch so, daß der andere Schenkel zugleich den Endpunkt erreichen, und zugleich in Beschreibung der Peripherie die Linie auch auf der andern Seite schneiden könne; von diesem Durchschnitte aus ziehe man einen Diameter, und verbinde den andern Endpunkt desselben mit dem gegebenen Punkte, so steht diese Linie allemal perpendikulär auf der anderen. Fig. 21 ist gegenwärtige Anweisung versinnlichet, wo a den gegebenen Punkt bezeichnet.

Zweyte Methode. Die sich vielmehr bey Schlagung eines rechten Winkels auf dem Felde, als auf dem Papier gebrauchen läßt.

Man strecke die Meßkette auf jener Linie aus, worauf der Perpendikel gefällt werden soll. Nun werden 18 Ringe oder Schuhe von der Kette angezogen, und der letzte oder 18te Ring durch einen eingesteckten Pfahl oder Pflock in dem gegebenen Punkt befestiqt. Darauf werden von dem Uebrigen 6 Schuhe rückwärts gezählt, und der 6te so, wie der erste Ring gleichfalls durch einen gemeinschaftlichen Pfahl in der Erde fest gemacht. Endlich wird der 10te Ring von den gemeldten 18 ergriffen und angezogen, so werden die angestreckten 10 Ringe allemal den Perpendikel ausmachen. Der Beweis für beyde Methoden ist in meiner größern Geometrie ausführlicher anzutreffen.

Von

Von den Vierecken und ihrer Verzeichnung.

§. 65.

Wenn zwo und zwo Seiten eines Vierecks miteinander parallel laufen, so heißt das Viereck ein Parallelogram; wenn nur ein Paar Seiten dieß thun, wird es ein Trapez, und, wenn gar nirgends Parallelismus herrscht, Trapezoid genennt.

§. 66.

Man zählt vierley Arten von Parallelogramen, als Quadrate, Rechtecke, Rauten oder Rhomben und Rhomboiden.

Vier gleiche Seiten, und eben so viel rechte Winkel geben das Quadrat, wie Fig. 22. Zwo und zwo gleiche Gegenseiten, und lauter rechte Winkel das Rechteck Fig. 23. Vier gleiche Seiten mit zweenen und zweenen gleichen Gegenwinkeln den Rhombe Fig. 24. Zwey gleiche Paare sowohl von Gegenwinkeln als Gegenseiten den Rhomboid Fig. 25.

§. 67.

Aufgabe. Quadrate, Rechtecke, Rhomben und Rhomboiden zu zeichnen.

Auflös. Zu einem Quadrat wird nur eine Seite gegeben. Man errichtet auf einem der Endpunkte einen Perpendikel, der eben so hoch als die Seite ist, nimmt mit dem Handzirkel die Seite auf, um dem

dem Perpendikel besagte Höhe geben zu können, und beschreibt aus dem obern Endpunkte dieses Perpendikels einen Bogen, der mit gleicher Oeffnung des Zirkels aus dem andern Endpunkte der Grundlinie durchschnitten werden kann, so schließen die Linien, vom Durchschnittspunkte an die Endpunkte, wo der Zirkel zur Beschreibung der Bögen eingesetzt war, hingezogen, das verlangte Quadrat.

Zur Verzeichnung eines Rechteckes werden zwo Linien erfodert. Eine, gemeiniglich die längere, dient zur Grundlinie, und die andere wird als Perpendikel an einem der Endpunkte aufgerichtet, von dessen obern Endpunkte man mit der längern Seite einen Bogen macht, der aus dem zweyten Endpunkte der Grundlinie mit der kürzern Seite durchkreuzt werden kann. Das übrige Geschäft ist wie beym Quadrat.

Zur Beschreibung einer Raute giebt man eine Seite und einen spitzigen oder stumpfen Winkel. Es wird demnach allererst der Winkel nach §. 33 gezeichnet, und die Schenkel so lang als die gegebne Seite gemacht. Aus den Endpunkten dieser Schenkel macht man mit einer Oeffnung des Zirkels, der die Seite zum Maaß hat, durchkreuzende Bögen, als wollte man den Winkel in zween gleiche Theile theilen, und ziehe zuletzt die Linien zusammen, so ist geschehen, was man verlangt.

Zur Anlegung eines Rhomboids braucht man zwo Seiten, und einen Winkel, welcher wieder spitzig oder stumpf seyn kann. Man setze die zwo verschiedenen Seiten unter diesen Winkel zusammen,

und

und beschreibe mit eben diesen Seiten aus der Schenkel Endpunkten durchkreuzende Bögen, doch so, daß die gleichen Seiten beym Zusammenziehen der Linien an den Durchkreuzungspunkt hin einander entgegen zu stehen kommen, so ist der Rhomboid fertig.

§. 68.

Aufgabe. Ein Trapez zu zeichnen.

Auflösung. Dazu braucht man die zwo Parallelseiten, eine dritte Seite und den Winkel, unter welchem diese letztere mit einer der Parallellinien zusammen gesetzt ist; das übrige bestimmt sich von selbst. Man ziehe demnach allererst eine gerade Linie, mache sie solang, als jene Parallellinie ist, an welche die dritte Seite unter den gegebenen Winkel gesetzt ist; setze die bemeldte Seite wirklich unter den verlangten Winkel daran, ziehe vom Endpunkte dieser letztern eine Parallellinie mit der erstern nach §. 42, mache sie so groß, als die gegebene Parallelseite, und schließe die Figur. Fig. 26 ist ein Entwurf hievon.

§. 69.

Aufgabe. Ein Trapezoid zu verzeichnen.

Auflös. Hier ist nothwendig, daß drey aneinander hängende Seiten, und die zween Winkel, die die mittlere Seite mit den äußern beyden macht, gegeben werden. Man setze also diese Stücke durch Hilfe des Transportärs zusammen, und schließe zuletzt die Figur. Einen Begriff hievon giebt Fig. 27.

*) Exem.

*) Exempel. Bey einem Landgebäude bildet der Grund des Hauses ein Quadrat, dessen Seite $46'$ hält. Der Stall ist ein Rechteck, dessen zwo Seiten $78'$ und $34'$ messen. Die Mißstätte gleicht einer Raute, wovon eine Seite $28'$, und der spitzige Winkel 75° hält. Der Hof zwischen Haus und Stall hat die Figur eines Rhomboids, wovon die längere Seite $82'$, und die kürzere $63'$ hält, der stumpfe Winkel ist 103°. Das daranstossende Wurzgärtchen macht einen Trapez, wo die zwey Parallelseiten $28'$ und $35'$ halten, die dritte Seite ist $19'$, und macht mit der größern Parallellinie einen Winkel von 68°. Endlich ist der Krautgarten ein Trapezoid, wo drey aneinander stossende Seiten $44'$, $49'$ und $54'$ halten; die mittlere, macht mit der ersten einen Winkel von 70°, und mit der letztern 115°. Man bringe alle diese Figuren im verjüngten Maaßstabe zu Papier!

Von den Vielecken und ihrer Verzeichnung.

§. 70.

Unter der Benennung Vieleck (Polygon) versteht man jede geradlinichte Figur, die mehr als 4 Seiten oder Winkel hat. Man theilt die Vielecke in zwo einzige Klassen ab, nämlich in die regularen und irregularen. Jene haben lauter gleiche Seiten, und lassen sich in einen Zirkel so hineinbeschreiben,

daß

daß die Seiten Sehnen des Zirkels abgeben. Bey den irregulären geht dieß nicht an.

§. 71.

*Aufgabe. Ein reguläres Polygon in einen Zirkel von gegebenen Radius zu beschreiben.

Auflös. Man beschreibe mit dem gegebenen Radius einen Zirkel, und mache diesen Radius auch irgendwo sichtbar. Man dividire die 360° der Peripherie durch die Anzahl der Seiten z. B. durch 9, die das Polygon bekommen soll, und setze mit Hilfe des Transportärs einen Winkel von so vielen Graden, als der Quotus auswirft, wie hier 40°, an den Mittelpunkt. Da nun die Schenkel Radiusse sind, so schneide man den Bogen, der zwischen den beyden Radiussen liegt, so oft von der Peripherie ab, als es angeht, und ziehe die Sehnen dazu, so ist das Polygon gemacht. Als Beyspiel dient Fig. 28.

*) Exempel. Es soll zu einem Festungsthurm ein achteckichter Grund gegraben werden, so, daß der Radius des Polygons 18' bekömmt; man soll durch Zeichnung die Länge einer Seite finden.

§. 72.

Aufgabe. Ein irreguläres Polygon zu zeichnen.

Auflös. Dazu müßen alle Seiten, bis auf eine, die die Schlußseite heißt, gegeben werden; auch alle Winkel, und zwar, wie sie der Ordnung nachfolgen. Die letzten Winkel, die auf der Schluß-

seite

seite liegen, sind nicht nothwendig. Man verfährt daher bey der Zeichnung wie beym Trapezoid, bis alle Seiten unter ihren Winkeln aneinander gesetzt sind. Fig. 29 versinnlicht das Gesagte.

*) Exempel. Ein Förster auf dem Lande schickt von seiner Ausmessung eines Waldes folgende Anzeige zum Forstamt hieher: „Das ganze Gehölz ist ein Siebeneck; die erste „Seite, wo ich zu messen angefangen, hält 2440', die nächste daran 1910', der Winkel dazwischen 127°. Nachher „folgen die Winkel und Seiten so auf einander: Winkel „109°, Seite 1592', Winkel 73°, Seite 920', Winkel 123°, „Seite 1087', Winkel 89°, Seite 792'. Die letzte Seite „ist sumpficht, und konnte daher nicht wohl gemessen wer„den.“ Nun ist die Frage, ob sich aus diesen gegebenen Stücken der Plan des Gehölzes zeichnen lasse, und wie groß im bejahenden Falle die letzte Seite ausfalle?

Bestimmung der Winkel in den bis daher abgehandelten Flächenfiguren.

§. 73.

In jedem Dreyecke halten alle drey Winkel zusammen 180°. Praktisch ist zwar der Beweis dieses Satzes nicht mathematisch streng, aber sinnlich überzeugend. Man bestimme mit gleicher Oeffnung des Zirkels das Maaß jedes der 3 Winkel durch einen Bogen aus dessen Scheitelpunkt; beschreibe mit der nämlichen Oeffnung irgendwo auf einer Linie eine halbe Peripherie, das ist 180°, und schneide diese 3 Bögen

das

davon ab, so wird man sehen, daß sie allemal mit einander die halbe Peripherie ausmachen. Fig. 30 ist dieß anschaulich gemacht, wo der Bogen hk = ab, kl = cd und lp = fg ist.

*) Die algebraische Beweisführung geht so vor sich. Man bezeichne die Winkel des Dreyeckes durch Buchstaben, so heißt der

Satz

Fig. 31. $m + x + s = 180^\circ$.

Beweis.

Es werde durch den Scheitelpunkt irgend eines Winkels eine Linie mit der Gegenseite parallel gezogen, so entstehen die Wechselwinkel

$$z = m$$

und $$y = s$$

Da nun $z + x + y = 180^\circ$ als Nebenwinkel nach §. 34.

Substituiert $m + x + s = 180^\circ$.

§. 74.

Weil nach §. 63 alle Winkel in gleichseitigen Dreyecken einander gleich sind, so ist das Maaß eines solchen Winkels $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$.

§. 75.

Wenn in gleichschenklichten Dreyecken ein Winkel gegeben ist, so sind alle drey bekannt. Denn ist der am Scheitel gegeben, so darf er nur von 180° abgezogen werden, der Rest muß anzeigen, wie viel die beyden Winkel an der Grundlinie betragen. Weil aber diese nach §. 62 einander gleich sind,

so

so hält einer die Hälfte vom Rest. — Ist ein Winkel an der Grundlinie bekannt, so ist es auch der andere: diese beyden von 180° abgezogen, bleibt der Winkel am Scheitel.

Es halte z. B. ein Winkel an der Grundlinie 67° 40′, folglich hält der andere ebenfalls 67° 40′ diese zusamm addirt

	67	40	
	67	40	
	135°	20′	und
von	180	abgezogen	
	135	20	
so bleibt	44°	40′	für den dritten Winkel.

Es halte im erstern der Winkel am Scheitel 19° 32′ so muß dieß von 180° abgezogen, und der Rest halbirt werden

	180		
	19	32	
	160	28	
:2	80°	14′	beträgt ein Winkel an der Basis.

§. 76.

Eben so begreiflich ist es auch, daß, wenn in was immer für einem Dreyecke zween Winkel gegeben sind, der dritte gleichfalls bekannt seyn müße. Es betrage z. B. einer 27° 36′ und der andere 58° 9′ daher die Rechnung:

	27	36
	58	9
	85	45
180		
85	45	
94°	$15'$	die Größe des dritten Winkels.

*) Exempel 1) Man habe zwey gleichschenklichte Dreyecke. In einem halte der Winkel am Scheitel $43^{\circ}\ 17'$, im andern einer an der Grundlinie $67^{\circ}\ 38'$; wie groß sind die andern Winkel?

2) In einem ungleichseitigen Dreyecke mißt ein Winkel $22^{\circ}\ 42'$, ein anderer $65^{\circ}\ 52'$; wie groß ist der dritte?

§. 77.

Die Winkel im jedem Vierecke, es mag ein Parallelogram seyn oder nicht, halten zusamm genommen 360°. Denn wenn man durch die Figur von einem Eck zum andern eine gerade Linie zieht, (man nennt sie Diagonallinie) so entstehen allemal zwey Dreyecke, wovon eines 180° beträgt: 2×180 ist aber $= 360^{\circ}$.

*) Die Algebra beweißt dieß so:

Satz. Fig. 31.

$$m + x + y + s = 360^{\circ}$$

Beweis.

$$m + o + n = 180^{\circ}$$
$$r + z + s = 180$$

add. $m + o + r + z + n + s = 360^{\circ}$

aber

aber $o + r = x$ } Denn das Ganze ist
$n + z = y$ } seinen Theilen gleich.

subſtit. $m + x + y + s = 360°$.

§. 78.

Wenn in einem Rhombe oder Rhomboide ein Winkel bekannt ist, so sind es alle viere. Denn der gegenüberstehende ist nach §. 66. eben so groß. Diese zusammaddirt, die Summe von 360° abgezogen und den Rest halbirt, so entstehen die andern zween Winkel 85° 13′; da nun der Gegenwinkel gleiches Maaß hat, so gilt die Rechnung:

	85	13
	85	13
	170	26
	360	
	170	26
	189	34
:2	94°	47′, das Maaß eines jeden von den andern beyden Winkeln.

*) Exempel. In einer Raute hält ein Winkel 38° 33′, wie groß sind die andern drey Winkel insonderheit?

Noch einige nothwendigen Bemerkungen über die Flächenfiguren.

§. 79.

Jedes Parallelogram kann durch eine Diagonallinie §. 77. in zwey kongruente Dreyecke zertheilt werden. Denn die Seiten dieser Dreyecke sind die nämlichen; weil die Gegenseiten in Parallelogrammen §. 67. einander gleich seyn müßen, und die Diagonallinie zu jeden der beyden Dreyecke gehört.

*) Mit Buchstaben stellt sich der Beweis dem Auge in Kürze wieder so dar

Fig. 53. Satz.

$\triangle abc \cong \triangle acd$

Beweis.

$\left.\begin{array}{l} ad = bc \\ ab = dc \end{array}\right\}$ als Gegenseiten

$ac = ac$

---

also $\triangle abc \cong \triangle acd.$

§. 80.

Es kann daher auch wechselweise jedes Dreyeck zu einem Parallelogram ergänzt werden, welches noch so groß als das Dreyeck selbst ist. Denn man darf nur eine der drey Seiten als Diagonallinie ansehen und zu jeden der beyden übrigen eine Parallellinie ziehen, die sich wieder zu einem Dreyecke schliessen. Fig. 34. macht dieß, nöthigen Falles, begreiflich, wo abc das ursprüngliche Dreyeck vorstellt.

§. 81.

Die Höhe eines Dreyeckes kann verschieden gemessen werden, je nachdem man eine der drey Seiten zur Grundlinie (Basis) annimmt. Meist erwählt man die dazu, welche horizontal liegt, das heißt, die mit unserm Horizonte parallel läuft, oder die auf einer Horizontalfläche uns am nächsten liegt. Wenn man man nun auf besagte Grundlinie, oder auf die Richtung desselben vom Gegenwinkel einen Perpendikel herabfällt, so ist dieser Perpendikel die Höhe des Dreyecks. So ist z. B. Fig. 35. die Höhe der Perpendikel ad auf die Grundlinie bc selbst: Fig. 36. aber der Perpendikl dh auf der Richtung der Grundlinie, weil es sich anders nicht thun läßt.

§. 82.

Auch bey Parallelogramen bleibt es willkührlich, welche Seite man als Grundlinie gelten lassen will: doch fällt die Wahl meistentheils so aus, wie gerade oberhalb von den Dreyecken bemerkt worden. Die Höhe bey dieser Art Flächenfiguren ist allemal die Parallelweite zwischen der Grundlinie und der Gegenseite, z. B. Fig. 37. der Perpendikel ab oder cd.

§. 83.

Trapezen haben gleichfalls die Distanz der darinn vorkommenden Parallellinien zur Höhe. Reguläre Polygone (Vielecke) erkennen den Perpendikel von Mittelpunkt aus auf eine Seite hingezogen als ihre Höhe. Bey Trapezoiden und irregulären Vielecken hingegen gehört die Höhe unter die Undinge.

§. 84

§. 84.

Aufg. In jeder Flächenfigur, wo eine Höhe üblich ist, dieselbe durch eine Linie sichtbar zu machen.

Auflös. Da die Höhe allemal ein Perpendikel seyn muß, so darf bloß das angewendet werden, was § 64. von Errichtung der Perpendikel gelehrt worden.

§. 85.

Jedes schiefwinklichte Parallelogram, dergleichen die Rauten und Rhomboiden sind, ist so groß als ein Rechteck, das gleiche Grundlinie und Höhe mit selben hat; oder mit andern Worten: Jedes schiefwinklichte Parellogram kann in ein Rechteck verwandelt werden, ohne das Höhe und Grundlinie dabey leidet.

Man nehme z. B. Fig. 38. das Parallelogram a b c d vor die Hand. Wenn nun der Perpendikrl a f gezogen, b c bis g verlängert, und auch d g perpendikulär herabgefällt wird; so ist das neuentstandene Rechteck a d g f eben so groß als das vorige schiefe Parallelogram: denn was durch das Dreyeck a b f davon hinweg gekommen, dieß ist anderseits durch das hinzugekommene Dreyeck d c g ersetzt worden. Daß aber die beyden Dreyecke einander gleich sind, wird so erwiesen: die Seite a f ist so groß als d g; weil beyde Linien die Parallelweite vorstellen. Ferner ist a b so groß als d c, nach der Zeichnung eines Parallelograms. Bey f und

g sind

g sind rechte Winkel wegen den Perpendikeln. Die Winkel bey b und c sind ebenfalls gleich als innerer und äußerer Winkel der Parallellinien ab und dc, die von der Linie bg durchschnitten werden §. 47. Was nun in jedem Dreyecke noch an 180° abgeht, müßen die spitzigen Winkel bey d und a halten, und eben deswegen auch einander gleich seyn. Folglich hat man in jedem der zwey Dreyecke zwo Seiten und den Zwischenwinkel gleiches Maaßes, und dieß beweiset nach §. 58., daß die beyden Dreyecke kongruent sind.

§. 86.

Da es nun ausgemacht ist, daß schiefwinklichten und rechtwinklichten Parallelogramen von gleicher Grundlinie und Höhe einerley Inhalt zukömmt, so muß dieß auch von schiefwinklichten und rechtwinklichten Dreyecken gelten, die gleich große Basis und Perpendikel haben. Denn jedes Dreyeck läßt sich zu einem doppelt so großen Parallelogram von der nämlichen Höhe und Basis ergänzen. Da nun diese Figuren den nämlichen Inhalt haben, wie oben erwiesen worden, so sind auch nothwendig die halben Figuren, das ist, die Dreyecke §. 79. von gleichem Inhalte.

§. 87.

Zwey oder mehrere Dreyecke von einerley Höhe, die Grundlinien mögen seyn, wie sie wollen, lassen sich in ein einziges Dreyeck verwandlen. Denn man ziehe eine Horizontallinie von unbestimmter Länge, errichte am Ende (oder auch irgendwo in

der

der Mitte) derselben den gemeinschaftlichen Perpendikel, schneide nach und nach sämmtliche Grundlinien von der Horizontallinie ab, und vereinige den letzten Endpunkt (wenn der Perpendikel in der Mitte ist, die beyden Endpunkte) mit dem obersten Punkt des Perpendikels durch eine Linie, so ist das Geschäft fertig. So hat z. B. Fig. 40. das Dreyeck lpm die nämliche Größe wie Fig. 39. das Dreyeck abd; weil lp = ac und pm = bd ist. Das nämliche ist aus gleichen Gründen auch von den Dreyecken lmn und gfk wahr. Folglich muß nothwendig das ganze Dreyeck lpn den beyden Dreyecken abd und fgk zusammgenommen gleich seyn.

§. 88

Da jedes Trapez durch eine Diagonallinie in zwey Dreyecke zerschnitten werden kann, welche Dreyecke die Parallellinien zu Grundlinien und die Parallelweite zur gemeinschaftlichen Höhe haben, so erhellet, daß man jedes Trapez in ein Dreyeck verwandeln könne; oder mit andern Worten: daß jedes Trapez einem Dreyecke gleich sey, dessen Grundlinie so groß ist, als die beyden Parallellinien zusammen genommen, und dessen Höhe die Parallelweite vorstellt.

Daraus wird auch begreiflich, wie ein reguläres Polygon in ein Dreyeck verwandelt werden könne. Denn es läßt sich allemal durch Radiusse in so viele Dreyecke von einerley Höhe und Grundlinie zerschneiden, als viele Seiten es zählt: man ist aber im Stande, wie eben gelehrt worden, alle diese Dreyecke in ein einziges zu bringen.

Es ist daher jedes reguläre Vieleck einem Dreyecke von der nämlichen Höhe gleich, dessen Grundlinie aus allen Seiten des Vielecks zusammengesetzt worden.

§. 89.

Je mehrseitiger ein Polygon im nämlichen Zirkel gemacht wird, desto näher kommen alle Seiten mit der Peripherie überein, und desto näher kömmt die Höhe des Polygons an Länge dem Radius des Zirkels. Es sind demnach ein Zirkel und ein in selben hineinbeschriebenes Polygon von unendlich vielen Seiten völlig einerley. Folglich gleicht auch der Zirkel einem Dreyecke, dessen Grundlinie die Peripherie und dessen Höhe der Radius ist; weil sich alle regulären Polygone in Dreyecke von besagter Eigenschaft verwandeln lassen.

§. 90.

Man hat durch eine sehr mühsame Rechnung gefunden, daß, wenn der Diameter eines Zirkels genau einen Schuh hält, die Peripherie in geradausgestreckter Linie allernächstens $3\frac{1}{7}$ Schuhe halte. Ist der Diameter 1 Zoll groß, so beträgt die Peripherie $3\frac{1}{7}$ Zolle. Hält der Diameter eine Meile, so gehen auf die Peripherie $3\frac{1}{7}$ Meile u. s. f. Man kann daher allemal durch die Regeldetri oder durch den reeßischen Ansatz aus dem gegebenen Diameter eines Zirkels die Peripherie desselben bestimmen. Wechselsweise ist man auch im Stande aus der Peripherie den Durchmesser zu berechnen. Es sey z. B. der Durchmesser eines Zirkels 18 Schuh, so wird

die

die Peripherie durch folgende kleine Rechnung gefunden:

Periph. Sch. ? | 18 Sch. Diam.
Diam. Sch. 1 | $3\frac{1}{7}$ Sch. Periph.
7 | 22
36
36
44
396 | $56\frac{4}{7}$ Schuhe.
77

*) Exempel. 1) Ein Kutschenrad halt $6\frac{1}{2}$ Schuh im Diameter, wie lang muß die Radschine dazu seyn?

2) Der Diameter der Erdkugel wurde 1720 geographische Meilen groß befunden; wie groß ist der Aequator oder der Mittagskreis?

3) Eine Kirche wird rund gebaut und hat zum Diameter 86 Schuh, wie lang muß eine kupferne Dachrinne werden, die sie umgiebt?

4) Um eine rund gebaute Stadt braucht jemand $1\frac{3}{4}$ Stund herum zu kommen; wie lange wird er durch die Mitte derselben brauchen?

Von

Von Berechnung der geradlinichten Figuren und des Zirkels, in Rücksicht ihres Flächeninhalts.

§. 91.

Keine Figur ist leichter zu berechnen als das Rechteck. Man darf hier nur die Grundlinie mit der Höhe multipliciren, so ist alles gethan. Die Ursache ist diese: die Länge der Grundlinie zeigt an, wie viel Quadratschuhe der Reihe nach auf selber liegen können; und Höhe oder Breite sagt mir, wie viel solcher Reihen von Quadratschuhen in der Figur enthalten sind. — Z. B. ein viereckichter Tisch sey 7 Fuß lang und 4 breit: Man will ihn mit Papier überdecken, wo jeder Bogen, setzen wir, genau einen Quadratschuh hält. Es werden sich daher 7 solcher Bögen zunächst an einem Rande der Länge nach auflegen lassen, und diese Reihe von Quadratbögen wird man 4mal wiederholen können. Folglich $7 \times 4 = 28$ Quadratschuhe.

Zum Ueberfluße soll hier eine berechnete Aufgabe die Sache noch mehr ins Licht stellen. Ein viereckichter Acker ist 948' lang und 720' breit, wie viel hält er bairische Morgen oder Joucharte, oder auch Tagwerke, welche drey Benennungen das Nämliche sagen, einen Morgen zu 40000 Quadratschuhe gerechnet?

Berechnung.

```
   948
    720
 ------
  1896
 6636
 ------
 2
 682560 | 17 Morgen u. 2560 Quadratsch.
 440000 |
```

§. 92.

Da Quadratflächen nach §. 66. eben so lang als breit sind, und die Seiten perpendikulär auf einander stehen, so darf bey Berechnung derselben nur eine Seite mit sich selbst multiplicirt werden, und das ganze Geschäft ist damit geendet. Ein einziges Beyspiel hierüber! Ein großer Lustgarten ist ins Quadrat angelegt, und hält eine Seite 1376′; wie viel Morgen Landes nimmt er ein?

Berechnung.

```
    1376
    1376
   ------
    8256
   9632
  4128
 1376
 -------
 2,
 1893376 | 47 Morg. u. 13376 Quad. Sch.
 440000  |
```

§. 93.

§. 93.

Schiefe Parallelograme, worunter Rhomben und Rhomboiden verstanden werden, sind nach §. 85. genau so groß, als Rechtecke von einerley Grundlinie und Höhe. Es ist daher ganz einerley, ob man diese Parallelograme selbst, oder aber ihre Aequivalente (gleichgiltige Figuren) berechnen will. Folglich ist der Inhalt eines jeden Parallelograms das Produkt aus der Grundlinie in die Höhe. Die Höhe ist aber allemal der Perpendikel zwischen der Grundlinie und der Gegenseite. Es halte z. B. die Grundlinie einer Rhomboide 89′ und der Perpendikel $17\frac{1}{2}$; wie groß ist der Fächeninhalt?

Berechnung.

```
   89
   35            17½
 ————           ————
  445            35
 267
————
 x (1 |
3xx5 | | 1557½ Quadratschuhe.
2222
```

*) 1) Exempel. Eine Heerstrasse, die 18′ breit ist, soll durch einen Acker geführt werden. Wie viel Quadratschuhe müßen dem Eigenthümer vergütet werden, wenn die Länge der Strasse durch diesen seinen Acker 217′ beträgt?

2) Der Boden irgend eines Saals stellt ein Quadrat vor, und soll mit viereckichten Marmorplatten ausgepflastert

ſtert werden. Die Länge oder Breite des Saals iſt 96′ groß; und die Länge oder Breite einer Marmorplatte mißt 16 Duodecimalzolle; wie viel braucht man ſolche Marmorplatten?

3) Ein Blumenbeet (Rabatte) ſtellt eine Rhomboide vor; die Grundlinie iſt 136′ und der darauf gefällte Perpendikel $23\frac{3}{4}'$; wie groß iſt deſſen Fläche?

§. 94.

Weil Dreyecke Hälften von Parallelogramen ſind, die einerley Grundlinie und Höhe mit ihnen haben; ſo findet man ihren Inhalt, wenn entweder das Produkt aus der Grundlinie und Höhe durch 2 dividirt, oder wenn einer von dieſen Faktoren mit der Hälfte des andern multipliciret wird. Z. B. Ein Dreyeck hat zur Baſis 320′ und zur Höhe 148′; wie groß iſt der Quadratinhalt deſſelben?

Berechnung.

148
320
———
296
444
———
11
47360 | 23980 Quatdratſchuhe.
2222

Oder

Oder:

```
  2
 320 | 160          148
 22  |               160
                    -----
                     888
                    148
                    -----
                    23680
```

Oder auch:

```
 148 | 74
  22 | 320
 ----------
      148
     222
    -----
    23680 Quadratschuh.
```

*) Exempel. Ein Anger ist dreyeckicht: die Grundlinie mißt 431' und der Perpendikel auf selber 274'; wie viele Tagwerke enthält dieser Anger?

§. 95.

Es ist §. 88. gezeigt worden, das jedes Trapetz einem Dreyeck gleiche, dessen Grundlinie die Größe der beyden Parallellinien zusamm genommen hat, und dessen Höhe die Parallelweite ist. Folglich darf man nur, um den Inhalt eines Trapetzes zu bekommen, die Parallelseiten zusamm addiren, und die Summe wie die Basis eines Dreyeckes behan-

behandeln. Es seyen z. B. in einem die Parallelseiten $28\frac{1}{2}'$ und $33'$ dann die Parallelweite $17\frac{1}{4}'$; wie groß ist der Inhalt?

Berechnung.

$$\begin{array}{r}28\frac{1}{2}\\ 33\\ \hline 61\frac{1}{2}\\ \hline 123\\ \hline 2\end{array} \qquad \begin{array}{r}17\frac{1}{4}\\ \hline 69\\ \hline 4\end{array}$$

$$\begin{array}{r}123\\ 66\\ \hline 1107\\ 378\\ \hline 4887\end{array} \qquad \begin{array}{r|l}4887 & 305\frac{7}{16}\text{ Quad. Sch.}\\ 16 & \\ 48 & \\ \hline -87 & \\ 16 & \\ 80 & \\ \hline 7 & \end{array}$$

*) Exempel. Der Grund eines Hauses ist ein Trapez. Die Seiten, welche unter sich parallel laufen, $63'$ und $58\frac{2}{3}'$: ihre Entfernung aber von einander beträgt $37\frac{3}{4}'$; was mißt diese Fläche?

§. 96.

§. 96.

In dem eben angeführten §. wurde auch gelehret, daß jedes reguläre Vieleck gleichfalls einem Dreyecke von der nämlichen Höhe gleich sey, dessen Grundlinie so groß ist, als alle Seiten des Vielecks zusamm genommen. Daher erhält man den Flächeninhalt eines solchen Polygons, wenn man eine Seite mit ihrer Anzahl, und dann auch mit der halben Höhe multiplicirt. Multipliciret man aber mit der ganzen Höhe, so muß das Produkt am Ende halbiret werden.

Es habe z. B. ein reguläres Polygon 8 Seiten, und jede sey 17′ groß, Der Perpendikel betrage $11\frac{1}{6}'$; wie groß ist dessen Fläche?

Berechnung.

```
   17
    8                 11 1/6
 ----               --------
  136                  67
   67
 ----
  952
  816        4
 ----        |
 9112       1/4|     759 1/3 Quadratsch.
  12         |
  84
 ----
   71
   12
   60
 ----
  112
   12
  108
 ----
    4
```

*) Exempel. 1) Die Grundfläche des chinesischen Thurmes im englischen Garten allhier ist ein reguläres Zwölfeck, wovon eine Seite $14\frac{1}{2}'$ und die Höhe, oder der Perpendikel vom Mittelpunkt des Polygons aus, auf eine Seite hingefällt, $27'$ beträgt. Wie viele Quadratschuhe nimmt diese Fläche ein?

2) Der Grund eines Sommerschloßes ist ein Sechseck, das zur Seite $20\frac{1}{2}'$ hat, und die Polygonhöhe $29\frac{3}{4}'$ beträgt; wie groß ist der Flächeninhalt dieses Grundes?

§. 97.

Es ist ferner nach §. 80. ausgemacht. daß auch jeder Zirkel einem Dreyecke gleiche, dessen Grundlinie so groß als die Peripherie und die Höhe der Radius ist. Daher muß diese Flächenfigur gleichfalls nach dem Gesetzen der Dreyecke berechnet werden. Nur ist nothwendig, das man vorher aus dem gegebenen Diameter die Peripherie, oder wechselweise, aus der Peripherie den Diameter nach §. 90. bestimme. Hierist ein Beyspiel. Ein Zirkel hat zum Diameter $35'$, wie groß ist dessen Fläche?

Berechnung.

Periph. Sh.?	35 Sch. Diam.
1	$3\frac{1}{7}$ Sch. Periph.
7	22
	5
	110 Schuh Periph.

35

35
110

35
35

21(2 2
3850 | 962½ Quadratschuhe.
444 |

*) Exempel. 1) Der runde Tanzplatz im englischen Garten neben dem chinesischen Hause, welcher im Durchmesser $37\frac{1}{2}'$ hält, soll mit Brettern, eines zu 24 Quadratschuhe, ausgelegt verden; wie viel braucht man dazu?

2) Wie viel solcher Bretter fodert die runde Ebene im dasigen Amphitheater, dessen Diameter $94'$ mißt?

§. 98.

Trapezoiden und irreguläre Polygone können nicht wohl eher berechnet werden, als bis sie durch Diagonallinien zuvor nach Willkühr in Dreyeck zerschnitten, und in selben die Höhe gezogen worden. Man mißt und berechnet dann jedes Dreyeck besonders, und addirt am Ende alles zusammen, so hat man den Betrag derselben. Ein Beyspiel hierüber! Ein Fünfeck giebt durch Diagonallien 3 Dreyecke. Im Dreyeck A mißt die Grundlinie $166'$ und der Perpendikel $73\frac{1}{2}'$ im Dreyeck B die Grundlinie 217, die Höhe $114\frac{3}{4}'$ und im Dreyeck C die Grundlinie $37'$ und die Höhe $22\frac{1}{3}'$; wie groß ist dieses Fünfeck?

A

166
147 $\qquad\qquad$ $73\frac{1}{2}$
———— $\qquad$ ————
1162 $\qquad\qquad$ 147
664
166 $\quad$ 2
————
24402 | $6100\frac{1}{2}$ Quadratschuh.
4444

B

217 $\qquad$ $114\frac{3}{4}$
————
459
217
————
3218
459
918
————
134
99603 | $12450\frac{3}{8}$ Quadratschuh
88888

C

37 $\qquad$ $22\frac{1}{3}$
————
67
37
————
469
201
————
11
2479 | $413\frac{1}{6}$ Quadratschuh.
666

$$\begin{array}{r} 6100\frac{1}{2} \\ 12450\frac{3}{8} \\ 413\frac{1}{3} \\ \hline 18964\frac{1}{24} \end{array}$$

Antw. $18964\frac{1}{24}$ Quad. Sch.

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{6}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ 36 \\ 16 \\ \hline 100 \\ 96 \\ \hline 4 \end{array} \quad 1\frac{1}{24}$$

*) Exempel. Eine Viehweide ist ein irreguläres Siebeneck und giebt folgende 5 Dreyecke:

A	hat zur Grundlinie	$37\frac{1}{4}'$	und zur Höhe	$134\frac{1}{2}'$
B	—	—	$84\frac{2}{3}'$	—	$14'$
C	—	—	$219\frac{1}{2}$	—	$50'$
D	—	—	$184\frac{1}{6}$	—	$95\frac{2}{4}$
E	—	—	75	—	$28\frac{1}{2}$

Was beträgt der ganze Inhalt?

Anwendung der bisherigen Sätze auf das eigentliche Feldmessen.

§. 99.

Unter Feldmessen versteht man theils die Bestimmung von Weiten, besonders solcher, die sich wegen Hindernissen gerade zu nicht messen lassen; theils die Berechnung des Flächeninhalts größerer Reviere, wie auch die Vertheilung desselben; theils und vornehmlich die Verjüngung oder Aufnehmung eines Distriktes z. B. eines Waldes einer Flur u. d. gl. Wir sind im Stande, in allen diese Gattungen des Feldmessens etwas weniges und brauchbares aus den vorhergehenden Sätzen zu leisten.

§. 100.

§. 100.

Aufgabe. Eine mäßige Weite, die so beschaffen ist, daß dessen Messung von einem Endpunkt zum andern unmöglich wird, setzen wir es befinde sich dazwischen ein Weiher, Dickicht u. d. gl.; aber sich irgendwo ein Punkt finden läßt, von welchem aus man zu beyden messen kann, 1) ohne Meßtisch, sondern bloß mit Absteckstäben 2) mit Hilfe des Meßtisches zu bestimmen.

Erste Auflösung ohne Meßtisch.

Es seyen z. B. Fig. 41. x und y die beyden Oerter, dessen Entfernung voneinander gemessen werden soll, zwischen welchen sich aber ein Teich befindet. Man suche demnach einen dritten Ort, der wenn es möglich ist, die Beschaffenheit hat, daß man erstens zu beyden Oertern sowohl sehen, als auch mit der Kette messen könne, zweytens, daß man auch diese gemessenen Linien, wo nicht um die ganze Länge derselben, doch um ihre Hälfte oder um einen Theil derselben verlängern könne. In unsrer Figur ist der Punkt c dazu gewählt worden.

Man befestiget in selbem eine Fahne oder auch einen Stab, mißt dann von selben nach x und trägt die ganze Länge nach a ~~oder die Hälfte nach f.~~ Das nämliche nimmt man auch mit der Linie cy vor, und macht die Endpunkte a und b durch eingesteckte Stäbe sichtbar. Die Entfernung ba, welche, wie ich voraus setze, gemessen werden kann, ist so groß als die eigentliche Entfernung. Denn die Dreyecke cxy und abc sind nach §. 58. kongruent, weil

weil m und n Vertikalwinkel sind, ferner ac so groß ist als cx und bc so groß als cy. Folglich sind auch nach §. 69. die den Vertikalwinkel m und n entgegenstehenden Seiten ab und xy einander gleich.

Lassen sich die Linien cx und cy nicht ganz fort tragen, so verlängere man sie überall um einen beliebigen Theil, z. B. überall um den dritten Theil oder dgl. und messe die Entfernung der beyden Endpunkte, so wird dieß ebenfalls der dritte Theil der ganzen Entfernung xy seyn. Der Beweis fließt aus der Analogie. Denn verlängert man die Linien um ihr ganzes Maaß, so kömmt durch die Schlußlinie die Entfernung ganz heraus. Wenn man sie demnach um einen Theil verlängert so muß die Schlußlinie natürlich auch diesen Theil der Entfernung geben. Sollten sich allenfalls die Linien gar nicht verlängern lassen, so können die Hälften oder die dritten Theile u. dgl. auch rückwärts, wie in der Figur h und g gemessen werden. Der Beweis ist der nämliche, daß gh Fig. 41. ebenfalls wieder ein solcher Theil von der verlangten Entfernung sey. Denn man darf sich das Dreyeck gch nur doppelt auf einanderliegend vorstellen. Wenn man nun nur das obere bey gh aufhebt, und völlig umschlägt, so ist cdf daraus geworden, und liegt gh auf df, von welchem df es aber gerade oberhalb erwiesen worden, daß es der nämli Theil der Entfernung sey, um welchen Theil die Linie xc oder yc verlängert worden.

Zweyte Auflösung, mit dem Meßtisch.

Man suche einen Standpunkt von der nämlichen Beschaffenheit, wie in der erstern Auflösung ohne Meßtischchen; das heißt, von wo aus man zu beyden Oertern sowohl mit der Kette messen als mit der Alhidade visiren könne. Nur braucht in diesem Fall keine Linie verlängert zu werden. Ueber diesen Punkt setze man den Meßtisch, der mit weißem Papiere überzogen seyn muß, visire nach einem oder beyden Oertern, und ziehe mit einem feinen Bleystift eine Linie längs der Alhidade von unbestimmter Größe. Das Nämliche geschieht auch beym andern Orte, doch so, daß die beyden Linien irgendwo in der Mitte oder am vordern Theil des Meßtisches einen Winkel bilden, oder, was eines ist, sich einander durchschnriden. Wenn nun indeß die beyen Entfernungen mit der Kette gemessen worden, so schneide man sie im verjüngten Maaße aus dem Scheitel des besagten Winkels ab. Die Schlußlinie ist im nämlich verjüngten Maaße die verlangte Weite. In Fig. 42. ist dieß in etwas anschaulich gemacht.

Beweis.

Je länger man auf dem Meßtische die Linien ab und ac macht, desto länger wird auch die Schlußlinie bc ausfallen: so zwar, daß wenn der Tisch so groß wäre, daß man die Linien ax und ay ganz auftragen könnte, so würde auch die Schlußlinie der ganzen Weite gleichen; weil der Winkel bey a beeyden Dreyecken, dem auf dem Felde und dem auf den Meßtische, gemein ist, folglich wäre

Kon=

Kongruenz der Dreyecke da. Da man nun ab und ac z. B. 4000mal kleiner macht als ax und ay sind, denn daß heißt verjüngen, so muß auch natürlich bc der 4000enste Theil von xy werden, oder mit andern Worten, so muß bc das xy im verjüngten Maaße seyn.

§. 101.

Aufgabe. Die Entfernung zweyer Oerter finden, die so beschaffen sind, daß man von einem dritten Orte zwar zu beyden sehen, aber nur zu einem messen kann.

Auflös. Es ließe sich dieß zwar auch ohne Meßtisch, bloß mit Absteckstäbe, leisten, wie in meinem gräßern Werke praktische Geometrie §. 17. weitläuftig gezeigt worden. Allein die Sache scheint mir für Leser dieser Art zu schwer zu seyn. Wir wollen daher sogleich zum Meßtisch unsre Zuflucht nehmen.

Man suche sich einen solchen Standpunkt, wie in der Aufgabe bedungen worden, stelle den Meßtisch darüber und verfahre wie oben, außer daß man nur einen Schenkel in verjüngten Maaße messen und bestimmen kann; denn der andere Schenkel wird unbestimmt gezogen. Nun trage man den Meßtisch nach dem zugänglichen Orte und stelle ihn so, daß der Abschnittspunkt so viel möglich über denselben zu stehen kömmt. Dann lege man die Alhidade an die abgeschnittene Linie, und drehe den Tisch mit unverrückter Alhidade so lange, bis man den vorigen Standpunkt, der bey Wegtra-

gung des Meßtischchens durch eine eingesenkte Fahne sichtbar gemacht worden, erblickt. Nun wird der Tisch fest geschraubt, und die Alhidade so lange um den Abschnittspunkt fortbewegt, bis man auch das unzugängliche Ort ins Aug gebracht. Jetzt wird dann längs der Alhidade eine Linie gezogen, welche den vorigen Winkel zum Dreyecke schließt, und zugleich die verlangte Entfernung im verjüngten Maaße zeigt.

Beweis.

Von der Größe der Linie ab, Fig. 43. auf dem Meßtische hängt auch die Größe der Linie cb auf selber ab. Wäre ab so groß als die Sandlinie (so wird allemal die Linie zwischen zwey Aufstellungen des Meßtisches genennt) so mußte auch ac und cb die nämlichen Linien werden wie die des Feldes; weil die anliegenden Winkel mit denen des Felddreyeckes gemeinschaftlich sind. Da ab der 4000ste Theil, oder so was von der Sandlinie ist, so muß auch cb der 4000ste Theil der Entfernung seyn, welches der verjüngte Maaßstab angiebt.

§. 102.

Aufgabe. Die Entfernung zweyer Oerter zu messen, die so beschaffen sind, daß kein dritter Punkt Platz hat, von welchen man zu einem oder zum andern dieser Oerter messen kann.

Auflös. Auch hier thut das Meßtischchen die beßten Dienste. Man wählet eine Sandlinie aus,

von deren Endpunkten man nach beyden Oertern sehen kann. Man stelle das Tischchen auf einem dieser Punkte, und visiere nach beyden Oertern sowohl als nach dem andern Endpunkte: ziehe alle drey Linien, die ersten nämlich unbestimmt, und die letzte, die gemessen werden muß, nach verjüngtem Maaße. Ein gleiches thue man auch beym andern Endpunkt, so werden sich zwey Dreyecke auf einer Grundlinie ergeben, wo die Entfernung ihrer Spitzen, die Entfernung der beyden Oerter im verjüngten Maaße auswirft. Fig. 44. ist dieß sinnlich gemacht.

Beweis.

Die zwey Dreyecke auf dem Meßtische stellen im Kleinen die Dreyecke auf dem Felde vor, die aus der Standlinie und aus den unsichtbaren Visierlinien zusammengesetzt sind; folglich ist auch die Entfernung der beyden Spitzen das im Kleinen, was die Entfernung der beyden Oerter auf dem Felde ist.

*) Wem diese und folgende Beweise nicht streng genug scheinen, wie sie's auch wirklich nicht seyn mögen; weil die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke nicht voraus geschickt werden konnte, der kann selbe in meiner praktischen Geometrie nachlesen.

§. 103.

Aufgabe. Eine zugängliche Höhe zu messen.

Auflös. Unter Zugänglichkeit versteht man hier eine mäßige Horizontalentfernung irgend eines Stand-

punk-

punktes, von wo aus man das Höhenobjekt erblicken, und die Entfernung durch die Kette messen kann. Man nimmt daher einen Höhenmesser (Astrolab), visiert vom Standpunkt aus nach der Spitze des Objekts, so bestimmt sich der Winkel, welchen die Visierlinie mit dem Horizont macht; dann zieht man auf einem Papier eine gerade Linie, schneidet die gemessene Horizontalfernung im verjüngten Maaße davon ab, und trägt durch Hilfe eines Transportårs den gefundnen Winkel darauf, so ist der Perpendikel, welcher diesen Winkel zum Dreyecke schließt, die verlangte Höhe im verjüngten Maaße, bis auf die Höhe des Stativs, welche man am Ende noch hinzu addieren muß.

Beweis.

Könnte man die ganze Entfernung, wie sie ist, zu Papier bringen und den Winkel darauf tragen, so wäre der Perpendikel die wahre Höhe; denn zwischen beyden Dreyecken hätte Kongruenz Platz, zwischen dem Dreyecke nämlich auf dem Felde, welches die Visierlinie, das Höhenobjeckt, und die Horizontallinie macht, und dem Dreyeck auf dem Papiere; weil überall eine Seite und die darauf liegenden Winkel die nämlichen sind. Da nun die Grundlinie des kleinen Dreyckes der 4000ste Theil von den des großer Felddreyeckes ist, so muß auch der Perpendikel auf dem Papiere der 4000ste Theil des Höhenobjeks seyn. Fig. 45. erklärt das Sinnliche vom Gesagten.

§. 104.

§. 104.

Aufgabe. Eine unzugängliche Höhe zu messen.

Auflös. Man mache in einiger Entfernung eine ebne Standlinie ausfindig, deren Endpunkte so beschaffen sind, daß man aus ihnen das Höhenobjekt wenigstens von oben erblicken könne. Man lasse die Standlinie messen, und trage sie verjüngt auf ein Papier. Dann stelle man den Höhenmesser auf die beyden Endpunkte, bestimme sowohl den spitzigen als den stumpfen Winkel, den die Visierlinien mit der Standlinie machen, trage diese Winkel mit Hilfe eines Transportärs auf die verjüngte Linie, und ziehe die Schenkel derselben in ein Dreyeck zusamm, so wird die Höhe des Dreyecks das verjüngte Maaß von der Höhe des Objekts seyn. Fig. 46. macht dieß noch mehr begreiflich, und der Beweis hievon wird so wie die vorhergehenden geführt.

§. 105.

Aufgabe. Den Inhalt einer Fläche auf dem Felde auszumessen.

Auflös. Ist die Fläche ein reguläres Rechteck, wie es die meisten Aecker sind, so darf bloß Länge und Breite gemessen, und diese beyde Zahlen nach §. 91. mit einander multipliciert werden.

Ist die Fläche ein Dreyeck, so kann man entweder die Seiten alle drey messen, und mit ihrem verjüngten Maaße in der nämlichen Ordnung, wie ein

ein Dreyeck zeichnen, wo sich der Perpendikel leicht bestimmen, und folglich der Flächeninhalt nach §. 94. berechnen läßt: oder man mißt bloß eine bequeme Linie als Basis, dann auch den Perpendikel auf dieselbe, und berechnet die Figur ebenfalls nach §. 94. Bey Bestimmung des Perpendikels aber geht man auf dem Felde so zu Werke. Man mache jenen Winkelpunkt, von wo aus der Perpendikel gefällt werden soll, durch einen eingesenkten Stab oder Fahne sichtbar: dann lasse man die Kette an jener Gegend der Grundlinie, wo beyläufig der Perpendikel hintrifft, in gerader Richtung ausstrecken, und fahre mit einem Winkelmesser so lange auf selber hin und her, bis eines der beyden Diopternliniale, welche einen rechten Winkel bilden müssen, auf den Endpunkt der Grundlinie und das andere auf besagten Winkelpunkt zielet. Man kann das auch durch ein sehr einfaches Instrument thun, wo zwo Latten in Form eines Kreutzes so an ein Stativ befestiget werden, daß eine oben, die andere aber unten längs an der Kette streift. Von diesem Punkt aus wird nun der Perpendikel gemessen.

§. 106.

Aufgabe. Ein Trapez auf dem Felde zu berechnen.

Auflös. Man messe die Parallelseiten, und ziehe nach eben gegebener Anweisung wo immer den Perpendikel dazwischen, so hat man zur Berechnung der Figur, gemäß §. 95. hinlängliche Stücke.

§. 107.

Aufgabe. Den Inhalt der Trapezoiden und irregulären Vielecken auf dem Felde ohne Meßtische zu bestimmen; vorausgesetzt, daß sich diese Figuren durch gehen lassen.

Auflös. Man stecke nach Belieben Diagonallinien ab, suche schickliche Grundlinien und fälle die Perpendikel dazu, so kann alles Theilweise berechnet und zuletzt in eine Summe gebracht werden.

§. 108.

Aufgabe. Es soll ein Rechteck auf dem Felde in etliche Theile von bestimmter Größe zerstückt werden, wo fallen die Theilungslinien hin?

Auflös. Entweder müssen die Theile gleich werden oder nicht. Im ersten Falle wird die gemessene Grundlinie des Rechteckes durch die Anzahl der Theilnehmer dividirt, wo der Quotus die Grundlinie eines jeden Theiles bestimmt. Im zweyten Falle werden die Grundlinien der Theile durch die Gesellschaftsrechnung ausfindig gemacht.

*) Exempel. Ein in Kultur stehendes Grundstück, das die Form eines Rechteckes hat, soll unter 3 Bauren nach der Anzahl ihres Viehes vertheilt werden. A hatte vorher 17 Stück darauf getrieben, B 22, und C 28; wie viel trifft jeden von der Grundlinie welche 1487 Schuh groß ist?

§. 109.

§. 109.

Aufgabe. Eine Fläche, die man umgehen kann, durch Hilfe des Meßtisches aufzunehmen, das heißt, einen Plan davon zu verfertigen.

Auflös. Man mache die Ecke der Flächenfigur durch eingesenkte Fahnen oder Stabe sichtbar, stelle den Meßtisch an ein solches Eck hin, und visiere nach dem nächsten Stabe, lasse auch diese Kette messen, und schneide sie verjüngt von der Visierlinie ab.

Nun wird der Meßtisch dahin getragen, wohin vorher visiert worden, und so gestellt, daß die Alhidade längs der verjüngten Linie nach dem verlassenen Standpunkt weiset. Hat man diese Richtung verricht, so wird der Tisch fest geschraubt, dann nach einem weitern Stabe fort visiert, gemessen und verjüngt.

Wenn man immer so fort fährt, bis man ganz herum gekommen, ohne einen Fehler gemacht zu haben, so muß sich die verjüngte Figur auf dem Meßtische bey dem letzten Ecke von selbst schliessen, und die Schlußlinie wird das verjüngte Maaß von der auf dem Felde haben. Zu Hause kann man dann diese Figur nach Belieben umarbeiten und ins Feine bringen.

§. 110.

Aufgabe. Eine solche Fläche mittels eines Standpunktes aus der Mitte aufzunehmen.

Auf-

Auflös. Man wähle einen Standpunkt in der Figur, von wo aus man nach allen Endpunkten der Winkel visieren und messen kann. Dahin wird der Tisch gestellt, wirklich nach allen besagten Punkten visiert, gemessen, und der Betrag im verjüngten Maaße an den gezogenen Visierlinien abgeschnitten. Am Ende werden die Endpunkte auf dem Meßtische durch Linien vereinigt, so ist die Fläche aufgenommen.

§. 111.

Daß man bey größern Revieren mehr als einen solchen Standpunkt nonnöthen habe, ist begreiflich: noch begreiflicher aber scheint es mir zu seyn, daß dergleichen Arbeiten nicht mehr Jugendunternehmungen seyn können, folglich in dieser Schrift keinen Platz mehr haben.

Erklärungen der Körperfiguren.

§. 112.

Eine Körperfigur ist ein von Flächen allenthalben begränzter Raum. Die Gränzen können ebne oder krumme Flächen seyn; und in beyden Fällen giebt es sowohl reguläre als irreguläre Körper: oder mit andern Worten, Körper, deren Inhalt sich geometrisch bestimmen, und andere, wovon er sich nicht geometrisch bestimmen läßt.

Von regulären Körpern soll es uns genügen, das Prisma, die Walze, die Pyramide, den Ke-

gel und die Kugel kennen zu lernen. Von den irregulären Körpern aber wollen wir bloß zeigen, wie man ihren Inhalt durch Kunstgriffe zu bestimmen sucht.

§. 113.

Wenn man lauter gleiche Dreyecke, oder lauter gleiche Vierecke, oder auch lauter gleiche Polygone aufeinander hinauflegt, vorausgesetzt, daß diese Flächen eine sehr kleine Dicke haben, so entsteht ein Prisma. Ist die Grundfläche, das ist, die erste ursprüngliche Fläche des Körpers, ein Parallelogram, so heißt das Prisma ein Parallelepipedum. Ist die Grundfläche ein Quadrat, und der Körper so hoch als eine Seite desselben, so wird diese Art von Prisma, oder diese Art von Parallelepipedum Kubus genennt.

Werden solche Dreyecke, oder Vierecke oder auch Polygone aufeinander hinauf gelegt, daß immer eins kleiner als das andere ist, und sich zuletzt in einer Spitze endigen, so daß von dieser Spitze so viel ebne Gränzdreyecke hinablaufen, als viele Seiten die übereinander liegenden Figuren haben, so heißt man den entstandnen Körper eine Pyramide.

Sind die aufeinander gelegten Figuren lauter Zirkel, die so abnehmen, daß von der Spitze des Körpers bis auf die Grundfläche überall gerade Berührungslinien (Tangenten) herabgezogen werden können, so giebt dieß einen Kegel.

Neh=

Nehmen die aufeinander liegenden Zirkelflächen so an Größe immer ab, daß sie ein darüber beschriebener Halbzirkel alle berührt, so stellt sich eine halbe Kugel dar, welche doppelt genommen eben darum die ganze Kugel geben muß. Fig. 47. sind alle diese Körperfiguren entworfen.

*) Sollte sich Jemand an diesen Erklärungen stoßen, weil sie ihm etwa ungewöhnlich scheinen, für den will ich auch die üblichen geometrischen Definitionen hersetzen:

Ein Prisma entsteht, wenn eine geradlinichte Flächenfigur sich in einer parallelen Lage aufwärts bewegt, und sich immer selbst zurückläßt. Ist die sich bewegenge Flächenfigur ein Parallelogram, so heißt der Körper Parallelpipedum: ist sie ein Quadrat, und die Höhe des Körpers die Quadratseite, so heißt der Körper Kubus.

Eine Walze entsteht auf zweyerley Weise; entweder wenn sich ein Zirkel, wie eben gesagt worden, aufwärts bewegt, oder wenn sich ein rechtwinklichtes Parallelogram um eine seiner Seiten bis zur ersten Stellung herum drehet.

Eine Pyramide entsteht, wenn über einer Fläche eine gegerade Linie an dem einen Ende fest ist, und sich mit dem andern um den Umfang einer geradlinichten Figur herum bewegt.

Ein Kegel entsteht, wenn sich ein rechtwinklichtes Dreyeck um seinen Perpendikel ganz herum bewegt.

Eine Kugel entsteht, wenn sich ein halber Zirkel um seinen Durchmesser herum bewegt.

Berechnung des Inhalts regulärer Körper.

§. 114.

Der Inhalt eines Prisma ist gleich dem Produkte aus der Grundfläche in die Höhe. Denn auf der Grundfläche können gerade so viele Kubikschuhe stehen, als viele Quadratschuhe die Grundfläche groß ist. Diese Schichte vom Kubikschuhen aber kann im Prisma aufwärts so oft wiederholt werden, als viele Schuhe das Prisma hoch ist. Daher muß die Anzahl aller Kubikschuhe einer Schichte mit d:r Anzahl der Schichten, das ist die Grundfläche mit der Höhe multipliciert werden.

§. 115.

Da bey Parallelepipeden die Grundfläche ein Parallelogram ist, dessen Flächeninhalt durch Multiplicierung der Länge mit der Breite bestimmt wird; so kann man behaupten, daß der kubische Inhalt eines solchen Parallelepipedums allemal ein Produkt aus drey Faktoren seye, nämlich aus Länge, Breite und Tiefe oder Höhe.

§. 116.

Da eine Walze nichts anders ist als ein Prisma, welches ein Polygon von unendlich vielen und kleinen Seiten, das ist einen Zirkel zur Grundfläche hat, so wird diese Körperfigur eben so, wie das Prisma berechnet, man multipliciert nämlich die Grundfläche, welche aber nach §. 97. erst gesucht werden muß, mit der Höhe der Walze.

§. 117.

§. 117.

Beym Kubus ist die Grundfläche ein Quadrat, wo eine Seite davon die Höhe des Kubusses vorstellt: folglich ist der Inhalt eines Kubusses ein Produkt aus drey gleichen Faktoren, man mag Länge, Breite oder Höhe als Faktoren annehmen.

§. 118.

Aufgaben. a) Die Seite eines Kubusses habe 3′ 9″ Duodecimalmaaß; wie groß ist der körperliche Inhalt?

b) Ein Parallelepipedum ist 3′ 7″ lang 2′ 11″ breit und 4′ hoch; wie viele Kubikfüße hält es in sich?

c) Ein Prisma, welches 8′ 2″ hoch ist, hat zur Grundfläche ein Dreyeck, wovon die Grundlinie 3′ 10″ und der Perpendikel auf selbe 2′ 8″ mißt; was ist sein kubischer Betrag?

d) Eine Walze, welche $7\frac{1}{2}'$ hoch ist, und der Diameter der Grundfläche $3\frac{3}{4}'$ mißt, soll berechnet werden; was findet man für einen kubischen Inhalt?

a) Berechnung des Kubusses.

```
  3'     9''
 12
 ---
  45''
  45
 ---
 225              91120 | 52 Kubikschuhe und
180               1728  | 1264 Kubikzolle.
 ---              8640
 2024             ----
   45             4725
 ---              1728
 10120           3456
 8100             ----
 -----            1264
 91120
```

b) Berechnung des Parallelepipedums.

```
  3'   7'       2'   11''          4'
 12             12                12
 ---            ---               ---
 43''           35''              48''
                                  43
                                  ---
                                  144
                                 192
                                 ----
72240 | 41 Kubikfüsse und        2064
1728  | 1392 Kubikzolle.           35
6912                             -----
----                            10320
 3120                            6192
 1728                            -----
 ----                           72240
 1392
```

c) Be-

c) Berechnung des Prisma.

3′ 10″	2′ 8″	8′ 2″
12	12	12
46″	32″	98″

46
32
―――
92
138
1
―――
1472
222

736
98
―――
5888
6624
―――
72128

72128 | 41 Kubiksch.
1728 | 1280 Kubikz.
6912
―――
3008
1728
―――
1280

d) Berechnung der Walze.

Allererst werde die Peripherie gefunden.

Schuh Periph?	$3\frac{3}{4}$ Sch. Diam.
1.	$3\frac{1}{7}$ Sch. Periph.
7	22
4	15
2	11
14	15

15
15
―――
165

Antw. $\frac{165}{14}$ Sch. Periph.

Wird

Wird nun die Peripherie mit dem halben Radius oder mit dem 4ten Theil des Diameters multipliciert, so erscheint die Zirkelfläche als Basis. Es ist aber der 4te Theil des Diameter $3\frac{3}{4} : \frac{4}{1} = \frac{15}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{15}{16}$. Daher

$$\frac{156}{14} \times \frac{15}{16}$$

```
  165              16
   15              14
  ———             ———
  825              64
 165               16
 ————             ———
 2475 | 11        224
 224
 ————
  235
  224
 ————
   11
          1728
            11
          ————
          1728
         1728     32
         —————
         19008 | 84 6/7
          224
         1792
         ————
          1088
           224
          896
          ————
           192
          ————
           224
```

Antw. 11 Kubiksch. und $84\frac{6}{7}$ Kubikzolle.

*) Exempel. 1) Ein Getreidkasten ist kubisch gebaut und hält eine Seite $13\frac{1}{3}'$; wie viel bairische Schäffel Getreides faßt er, da ein solches Schäffel allernächstens 9 bairische Kubikschuhe hält?

2) Mit welcher Gewalt drückt eine Mauer auf die Erde, welche $67'$ lang $3\frac{1}{2}'$ dick und $11'$ hoch ist, wenn der bairische Kubikschuh Mauerwerk 88 Pf. schwer ist?

3) In einer Braukühle, welche $87\frac{1}{3}'$ lang und $14\frac{1}{2}'$ breit ist, steht das Bier $2\frac{1}{2}''$ hoch, wie viel Maaß sind es; da $72\frac{1}{2}$ bairische Kubikzoll eine bairische Maaß geben?

4) Die steinerne Walze, womit im hiesigen Hofgarten die Terassen feste gemacht werden, ist $3\frac{1}{4}'$ hoch und der Durchmesser der Grundfläche mißt $2'\ 5''$; wie schwer mag sie seyn, wenn der bairische Kubikfuß dieser Steinart 120 bairische Pfunde wiegt?

5) Ein Teich ist zirkelrund und hält im Durchmesser $63'$. In einem Winter gefror er $1\frac{3}{4}'$ dick. Wie groß mußte ein Eiskeller seyn, der alles sein Eis zu fassen im Stande war?

6) Es soll ein Pfeiler von achteckichter Grundfläche $32'$ hoch aufgeführt werden. Wie viel braucht man Ziegelsteine; wenn ein Ziegelstein sammt seinem Mauerband 264 bairische Kubikzoll ausfüllt, und wenn eine Seite des Achteckes $5'$ und dessen Höhe $6'$ beträgt?

7) Bey irgend einem Melber wurde ein Dreyßger vorgefunden, der $3\frac{3}{8}''$ tief war, und der Durchmesser des Bodens $5\frac{5}{8}''$ hielte. Um wie viele Kubikzolle ist dieses Mehlmaaß zu klein oder zu groß, da jeder ächte Dreyßger $78\frac{7}{10}$ solche Zolle halten muß?

§. 119.

§. 119.

Es kömmt also bey der Berechnung der Prismen und Walzen alles auf die Grundfläche und Höhe an: gerade so wie in der Planimetrie bey Parallellogramen und Trapezen, wo nur Grundlinie und Höhe in die Rechnung gebracht werden dorfte. Man findet demnach den kubischer Inhalt überhängender Walzen und Prismen gleichfalls, wenn man die Grundfläche mit der wahren Höhe, das ist, mit dem Perpendikel multipliciert; weil die Anzahl der aufeinander liegenden Flächen, woraus das Prisma oder die Walze besteht, bey der nämlichen Höhe allemal sich selbst gleich bleiben muß, man mag ihnen die überhängende Gestalt ertheilen wie man will; wenn nur alle Flächen unter sich parallel bleiben. Zum anschaulichen Beweis dient jedes Buch, dessen Blätter in eine verschränkte Lage gebracht werden.

§. 120.

Jedes dreyeckichte Prisma läßt sich durch Diagonalschnitte in drey gleiche Pyramiden zertheilen, bey welchen sich zwo vorfinden, wo jede die Höhe und die Grundfläche mit dem Prisma gemein hat. Die dritte erhält in einer andern Lage mit einer dieser erstern Pyramiden gleiche Höhe und Grundfläche *). Folglich ist eine Pyramide von dreyeckichter Grundfläche der dritte Theil eines Prisma, das die nämliche Höhe und Grunfläche, wie die Pyramide hat.

---

*) Den Beweis dieses Satzes kann sich jeder von seinen Lehrer praktisch zeigen lassen. Denn man darf nur ein

Stück

§. 121.

Weil man eine Pyramide und ein Prisma von mehreckichten gleichen Grundflächen und der nämlichen Höhe in eine gleiche Anzahl solcher Körperfiguren von dreyeckichten Grundflächen zerschneiden kann, wo jede Pyramide der dritte Theil von dem ihm entsprechenden Prisma seyn muß; so ist der Satz nicht bloß von dreyeckichten Pyramiden, und Prismen sondern von allen mehreckichten Körperfiguren dieser Art erwiesen.

Auch von Kugeln und Walzen ist dieß wahr, weil ihre Grundflächen nach §. 97. Dreyecken gleich kommen; oder weil sie Polygone von unendlich vielen und kleinen Seiten sind, folglich ebenfalls wieder zu den Pyramiden und Prismen gehören.

§. 122.

Um demnach den körperlichen Inhalt einer Pyramide oder eines Kegels zu finden, wird die Grundfläche mit der Höhe multipliciert, und das Produkt durch 3 dividiert. Oder man multipliciert sogleich die Grundfläche mit dem dritten Theil der Höhe.

§. 123.

Aufgaben. 1) Eine Pyramide hat zur Basis ein Dreyeck, wovon die Grundlinie $7\frac{1}{2}'$ und der

Stück Brod oder Käs, oder ein Gartengewächs, z. B. eine Rübe hernehmen, erst zurecht schneiden, und dann das Prisma durch die gehörigen Schnitte zertheilen.

der Perpendikel $5\frac{3}{4}'$ mißt. Die Höhe der Pyramide beträgt $11\frac{1}{3}'$. Wie groß ist der körperliche Inhalt desselben?

2) Ein Kegel, der $14\frac{1}{8}'$ hoch ist, hält im Durchmesser seiner Grundfläche $8\frac{2}{3}'$; was ist sein Körperinhalt?

Berechnung der ersten Aufgabe.

Grundfläche: $(7\frac{1}{2} \times 5\frac{3}{4}) : \frac{2}{1} = \frac{15}{2} \times \frac{23}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{345}{16}$ Quadratschuh.

Körperlicher Inhalt $(\frac{345}{16} \times 11\frac{1}{3}) : \frac{3}{1} = \frac{345}{16} \times \frac{34}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{11730}{144}$. Nun wirklich dividirt.

```
11730 | 81 Kubikschuhe
 144
 1152
------
   210      1728
   144        66
   ---    ------
    66     10368
          10368
         -------
         114048 | 792 Kubikzolle.
           144
          1008
         ------
           1324
            144
           1296
          -----
            288
            144
            288
          -----
              0
```

Be-

Berechnung der zwoten Aufgabe.

Man bestimme allererst die Peripherie.

Schuh Periph	$8\frac{2}{3}$ Schuh Diam.
1	$3\frac{1}{7}$ Schuh Periph.
7	22
3	26
21	132
	44
Antw.	$\frac{572}{21}$ Schuhe. Daher

die Grundfläche: $(\frac{572}{21} \times 8\frac{2}{3}) : \frac{4}{1} = \frac{572}{21} \times \frac{26}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{14872}{252}$ Quadratschusche.

Körperlicher Inhalt $(\frac{14872}{252} \times 14\frac{1}{6}) : \frac{3}{1} = \frac{14872}{252} \times \frac{85}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1264120}{4536}$ Kubikschuhe.

Man dividire wirklich.

```
1264120 | 278 Kubikschuhe
4536..
9072
-------
35692
 4536
31752
-------
 39400
  4536
 36288
-------
  3112
```

```
      3112
      1728
      ----
     24896
      6224
    21784
    3112
   -------
   5377535 | 1185 11/21 Kubikzolle.
   4536...
   -------
    8415
    4536
   -----
    38793
     4536
    36288
   ------
     25056
      4536
     22680
    ------
      2376
```

$$\frac{2376}{4536} \overset{9}{\big|} = \frac{264}{504} \overset{4}{\big|} =$$

$$\frac{66}{126} \overset{6}{\big|} = \frac{11}{21}$$

*) Exempel. 1) Es soll eine Pyramide von 17' Höhe aus Stein ausgehauen werden. Die Basis muß ein Quadrat seyn, wovon die Seite $3\frac{1}{2}'$ mißt. Was wird diese Pyramide wiegen, wenn der Kubikfuß 112 bairische Pfunde schwer ist.

2) Ein Kelchgläschen ist $2\frac{1}{3}''$ tief, und hat zum Durchmesser der Oeffnung $1\frac{3}{4}''$. Wie viel solche Gläschen gehen auf eine Maaß, welche $72\frac{1}{2}$ Kubikzoll hält?

§. 124.

So wie sich die Zirkelfläche in unendlich viel Dreyecke zerschneiden läßt, die den Radius zur Höhe haben, und deren Grundlinien zusammengenommen die Peripherie ausmachen; so kann auch eine Kugel in unendlich viele Pyramiden zerschnitten werden, deren allgemeine Höhe der Radius ist, und deren sämmtliche Grundflächen die ganze Oberfläche der Kugel geben.

Es ist aber die ganze Oberfläche der Kugel allemal 4 solchen Zirkelflächen gleich, die durch die Mitte der Kugel gehen.

*) Der Beweis dieses Satzes, welcher umständlich in meinem größern Werke von der Elementargeometrie vorgetragen wird, setzt zu vieles voraus, als daß er hier geführt werden könnte. Man muß ihn daher als einen Lehnsatz gelten lassen; beyläufig wie §. 90. vom Zirkel.

§. 125.

Man findet daher den körperlichen Inhalt einer Kugel, wenn man alle Grundflächen der Pyramiden (nämlich die Oberfläche der Kugel) durch den 3ten Theil des Radius, oder was eines ist, mit dem 6ten Theil des Durchmessers, multiplicirt. Z. B. Eine Kugel hält im Durchmesser 11 Zoll; was ist der kubische Inhalt hievon?

Be-

Berechnung.

Man bestimme anfänglich die Peripherie.

Zoll Periph?	11 Z. Diam.
1	$3\frac{1}{7}$ Zoll Periph.
7	22
	11
	22
	22
	242

Antw. $\frac{242}{7}$ Zoll Periph.

Nun die vierfache Zirkelfläche.

$$\frac{242}{7} \times \frac{11}{4} \times \frac{4}{1} = \frac{242}{7} \times \frac{11}{1} = \frac{2662}{7} \text{ Quadratzoll.}$$

Endlich den Körperinhalt der Kugel.

$$\frac{2662}{7} \times \frac{11}{6} = \frac{29282}{42}$$

```
          2
 29282 | 697 4/21 Kubikzolle
  42 ..|
 252
 ----
  408
   42
  378
  ---
   302
    42
   294
   ---
     8
```

*) Erem-

*) Exempel. 1) Die Erdkugel hält im Durchmesser 1720 geographische Meilen; wie groß ist 1) ihre Oberfläche in Quadratmeilen, 2) ihr körperlicher Inhalt in Kubikmeilen?

2) Eine gläserne Hohlkugel ist 15″ hoch; wie viel Maaß würde sie halten, da, wie schon öfter erinnert worden, die bairische Maaß $72\frac{1}{2}$ Kubikzoll groß ist?

3) Eine steinerne Kugel hält 18″ im Durchmesser; was wiegt sie, wenn der Kubikfuß Stein 120 Pfund schwer ist?

4) Eine eiserne Kanonkugel hat im Durchmesser genau 5 $\frac{171}{1000}$ Zoll rheinisches Maaß, was wiegt sie, wenn der rheinische Kubikschuh gegossenes Eisen 390 bairische Pfund 21 Loth schwer ist?

Von Ausmessung irregulärer Körper.

§. 125.

Es giebt Körper, die, mit geometrischem Auge betrachtet, eine so unregelmäßige Gestalt haben, daß sie lediglich keiner Ausmessung fähig sind. Von dieser Art sind losgerissene Steine oder Felsenstücke, Kunstsachen, als Staten u. d. gl.

In solchen Fällen muß man, wenn ja dergleichen Dinge beweglich sind, zu andern Kunstgriffen seine Zuflucht nehmen. Eine davon ist, daß man reguläre Gefässe verfertigt, die z. B. die Form eines Parallelepipedums haben, sie eben stellt, und die Körper hineinsetzt. Werden sie nun mit Wasser oder recht feinem Sande bedeckt, und dann wieder herausgehoben, so kann der Raum, um welchen das Wasser oder der angeebnete Sand,

niedrer geworden, leicht gemessen und berechnet werden. Dieß muß nun eben darum die geometrische Größe eines solchen Körpers seyn.

Zum Beyspiel, man hat eine steinerne Statue. Das parallelepipedumförmige Gefäß werde mit einer Grundfläche von 18′ versehen. Es sey befunden worden, daß, nach der Herausnahme der Statue, das Wasser um $1\frac{1}{3}$′ gefallen sey, so ist nichts natürlicher, als daß der Körper $18 \times 1\frac{1}{3} = 24$ Kubikschuh messe.

§. 126.

Ungleich bequemer, weniger kostspielig und eben so genau, wo nicht vielleicht genauer, läßt sich die geometrische Größe eines solchen Körpers durch sein Gewicht erfahren, vorausgesetzt, daß dessen eigenthümliche Schwere bekannt ist. Die eigenthümlichen Schweren findet man aber von den meisten Körpern in Muschenbröcks Tabelle, die nun beynahe unter Freunden der Naturlehre in jedermanns Händen ist. Man darf da nur den Kettensatz zu Hilfe nehmen, und die ganze Sache ist abgethan. Wir wollen dieß in einem Beyspiele zeigen. Ein silberner Leuchter wäge 7 ℔. In obbesagter Tabelle findet man, daß die eigenthümlichen Schweren des Wassers und des Silbers wie 1 und $10\frac{1}{2}$ sind; oder mit andern Worten, daß Silber $10\frac{1}{2}$mal schwerer als Wasser sey, folglich haben 1 Pfund Wasser und $10\frac{1}{2}$ Pf. Silber einerley geometrische Größe. Da nun bekannt ist, daß ein bairischer Kubikschuh Wasser $44\frac{7}{10}$ bairische Pfunde wiegt, so muß die Sprechform des Kettensatzes also heißen:

ßen: Wie viele Kubikzoll halten 7 ℔ Silber; wenn $10\frac{1}{2}$ ℔ Silber so viel geometrische Größe enthalten, als 1 ℔ Wasser, und $44\frac{7}{10}$ ℔ Wasser 1 Kubikschuh giebt, und 1 Kubikschuh 1728 Zoll beträgt?

Kub. Zoll?	7 ℔ Silb.
$10\frac{1}{2}$	1 ℔ Wasser.
$44\frac{7}{10}$	1 Kubikschuh.
1	1728 Kub. Zoll.
Antw.	25 $\frac{345}{447}$ Kubikzoll.

Exempel 1) Wie groß darf ein Geschirr seyn, welches einen Zentner Quecksilber fassen soll, wenn dessen eigenthümliche Schwere 14mal größer als die des Wassers ist?

2) Ein italienisches Marmorstück wiegt genau 740 Pfund; wie viele Kubikschuhe hält es, wenn diese Marmorart $2\frac{7}{10}$mal schwerer als Wasser ist?

Auflösung der in diesem Werkchen aufworfenen Exempel.

Seite 4.

Exempel 1) Antw. 6 Schuh $7\frac{13541}{13913}$ Zoll.

Exempel 2) Antw. $114\frac{5639}{6469}$ bairische, $103\frac{301}{1440}$ französische und $106\frac{11432}{13913}$ rheinische Schuhe.

Exempel 3) Antw. 3 Schuh, 4 Zoll, $10\frac{1760}{6469}$ Linien.

Exempel 4) Antw. $9771\frac{2439}{14011}$ bairische Schuhe.

Seite 6.

Exempel 1) Antw. $16537\frac{7}{9}$ bairische Quadratschuh.

Exempel 2) Antw. $34590\frac{3318829}{193571569}$ rheinische Quadratschuh.

Exempel 3) Antw. 29 Quadratfuß und $93\frac{103269}{930248}$ Quadratzoll Königsbergermaaß.

Seite 7.

Exempel Antw. 8 Kubiksch. $1699\frac{98673937193}{270714459709}$ im bairischen Maaße.

Seite 8.

Exempel. Antw. $117\frac{16702505783}{17034106517}$ Manheimerkubikschuhe.

Seite 9.

Exempel. Antw. 2 Schuh 8 Zoll $5\frac{47}{125}$ Linien Duodecimalmaaß.

Seite 25.

Exempel. Antw. 115° 8′ am Sommeranfang, 138° 38′ zur Zeit der Nachtgleiche, und 126° 8′ am Winteranfang.

Seite 50.

Exempel 1) Antw. Im ersten Drevecke hält jeder Winkel an der Grundlinie 68° $22\frac{1}{2}$′, im zweyten Dreyecke mißt der Winkel am Scheitel 44° 44′.

Exempel 2) Antw. 111° 26′.

Seite 51.

Exempel. Antw. Jeder der spitzigen Winkel 51° 27′ und der übrige stumpfe Winkel 38° 33′, wie der gegebene.

Seite 58.

Exempel 1) Antw. $20\frac{3}{7}$, hält die Peripherie des Rades.

Exempel 2) Antw. $5405\frac{5}{7}$ geographische Meilen.

Exempel 3) Antw. $270\frac{2}{7}$ Schuh lang.

Exempel 4) Antw. $33\frac{9}{22}$ Minuten.

Seite 61.

Exempel 1) Antw. 3906 Quadratschuh.

Exempel 2) Antw. Nicht gar 5145 Marmorplatten.

Exempel 2) Antw. 3230 Quadratschuh.

Erste Tafel.

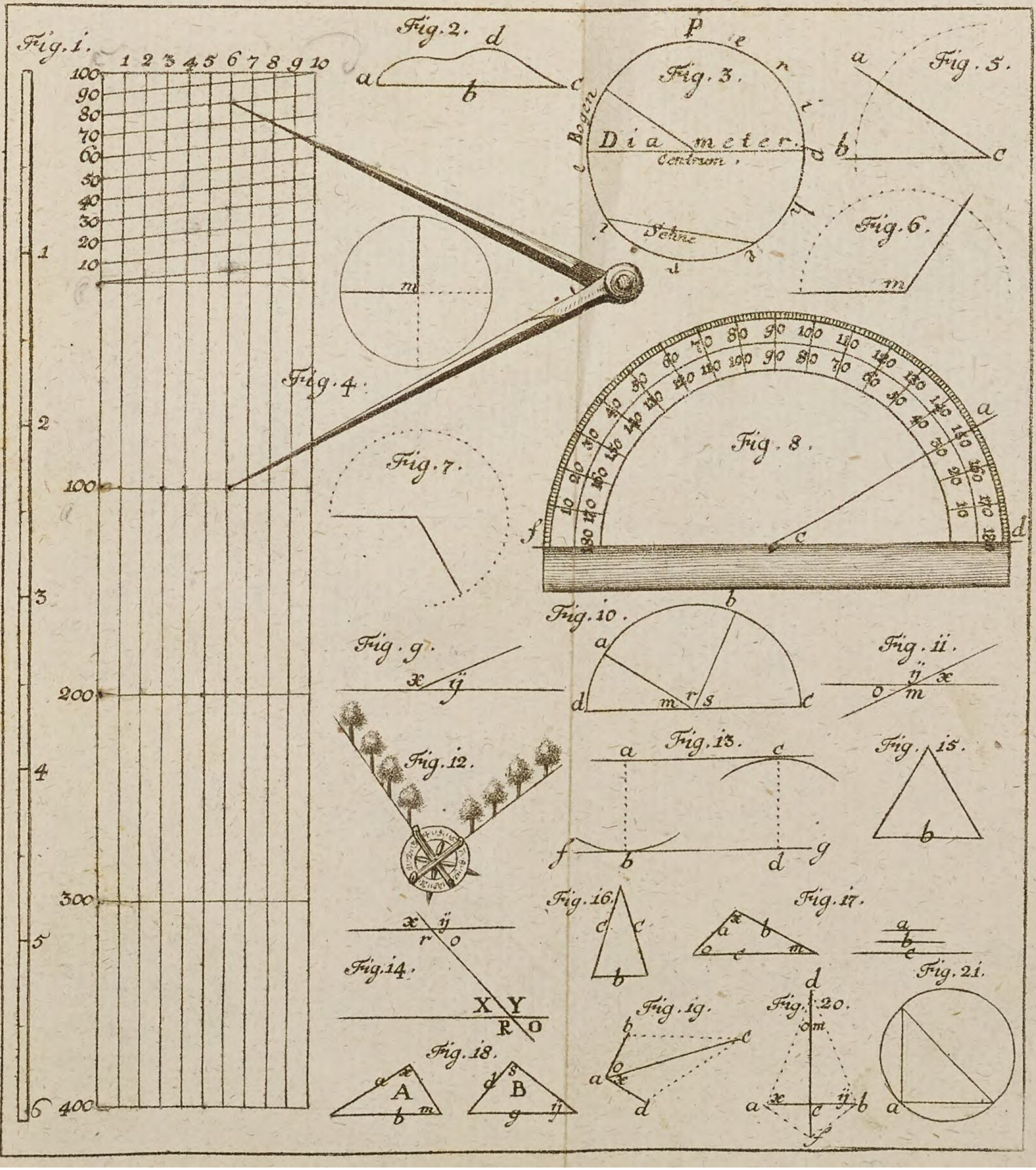


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Bogen
Diameter.
Centrum.
Sehne
Peripherie
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.

fel.

Fig. 3.
P
Dia meter.
Centrum.
Sehne
Fig. 5.
a
b
c
Fig. 6.
m
Fig. 8.
a
c
d
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 13.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.

Seite 63.

Exempel. Antw. 1 Tagwerk und 10047 Quadratschuhe.

Seite 64.

Exempel. Antw. $2296\frac{11}{24}$ Quadratschuhe.

Seite 66.

Exempel 1) Antw. 2349 Quadratsch. hält die Grundfläche des Chineserthurms.

Exempel 2) Antw. $1829\frac{5}{9}$ Quadratschuh.

Seite 67.

Exempel 1) Antw. Etwas über 46 Bretter.

Exempel 2) Antw. Gegen 290 Bretter.

Seite 69.

Exempel. Antw. $18424\frac{11}{12}$ Quadratsch.

Seite 79.

Exempel. Antw. A $377\frac{20'}{67}$, B $621\frac{29'}{67}$ und C $488\frac{18'}{67}$.

Seite 89.

Exempel 1) Antw. $263\frac{91}{243}$ Schäffel.

Exempel 2) Antw. Mit einer Gewalt von 2269 Zentner 96 ℔.

Exempel 3) Antw. 104 Eimer 48 Maaß.

Exem-

Exempel 4) Antw. 12 Zentner $42\frac{9643}{12221}$ ℔.

Exempel 5) Antw. $5457\frac{7}{16}$ Kubikfuß.

Exempel 6) Antw. Beynahe 25135 Ziegelsteine.

Exempel 7) Antw. Um $1\frac{15627}{35840}$ Kubikzoll zu groß.

Seite 97.

Exempel 1) Antw. Die Oberfläche der Erde hält $9297828\frac{4}{7}$ Quadratmeilen, und der körperliche Inhalt derselben ist $2665377047\frac{16}{21}$ Kubikmeilen.

Exempel 2) Antw. $22\frac{82}{203}$ Maaß.

Exempel 3) Antw. 2 Zentner $12\frac{1}{7}$ ℔.

Exempel 4) Antw. 16 ℔ $11\frac{34831546279821}{36288000000000}$ Loth.

Seite 9[illegible]

Exempel 1) Antw. $106\frac{2326}{8129}$ bairischen Kubikzoll.

Exempel 2) Antw. 6 Kubikschuh und $227\frac{85}{1341}$ Kubikzolle.

Exempel 4) Antw. 12 Zentner $42\frac{9643}{12221}$ ℔.

Exempel 5) Antw. $5457\frac{7}{16}$ Kubikfuß.

Exempel 6) Antw. Beynahe 25135 Ziegelsteine.

Exempel 7) Antw. Um $1\frac{15627}{35840}$ Kubikzoll zu groß.

Seite 97.

Exempel 1) Antw. Die Oberfläche der Erde hält $9297828\frac{4}{7}$ Quadratmeilen, und der körperliche Inhalt derselben ist $2665377047\frac{16}{21}$ Kubikmeilen.

Exempel 2) Antw. $22\frac{82}{203}$ Maaß.

Exempel 3) Antw. 2 Zentner $12\frac{1}{7}$ ℔.

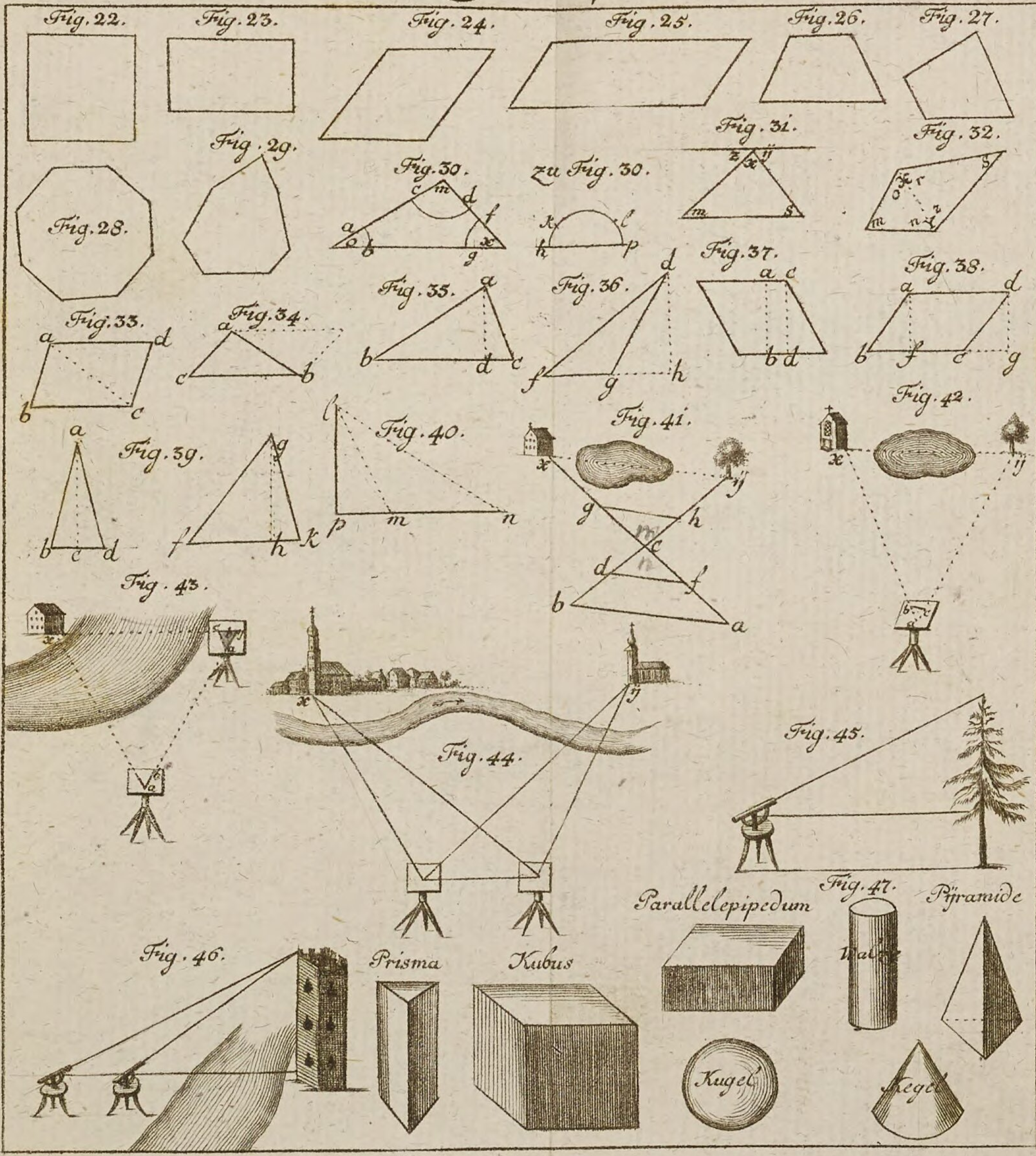
Exempel 4) Antw. 16 ℔ $11\frac{34831546279821}{36288000000000}$ Loth.

Seite 9[illegible]

Exempel 1) Antw. $106\frac{2326}{8129}$ bairischen Kubikzoll.

Exempel 2) Antw. 6 Kubikschuh und $227\frac{85}{1341}$ Kubikzolle.

Zweite Tafel.



Verbesserungen.

Seite 50 Linie 6 von unten, statt Fig. 31 lies Fig. 32.

S. 51 Linie 9 von oben, muß nach dem Wort: Winkel ein Punkt gemacht, und so fortgefahren werden: Es halte z. B. einer von den 4 Winkeln rc.

Seite 69 Linie 3 von oben, statt $\frac{1}{3}$ lies $\frac{1}{6}$.

Seite 70 Linie 7 von unten, streiche man die Worte aus: oder die Hälfte nach f.

Seite 74 Linie 13 von oben, statt a b lies ab.

Seite — — 14, 19 und 29 statt Sandlinie lies Standlinie.

Seite 82 Linie 17 von oben, muß noch hinzugesetzt werden: Ist die Grundfläche ein Zirkel, so hat man die Walze.

[illegible]

[illegible]

~~108 235a~~

Prändel

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Prändel, Johann Georg,

Meßkunde für die Jugend

München 1798

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- Math 1102
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11267811-9
VD18 10686908-004